ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

HERAUSGEGEBEN VON PROFESSOR R. VON MISES, BERLIN

unter Mitwirkung von A. FÖPPL-München, G. HAMEL-Charlottenburg, R. MOLLIER-Dresden, H. MÜLLER-BRESLAU-Charlottenburg, L. PRANDTL-Göttingen und R. RÜDENBERG-Berlin

:: Band 4 :: Februar 1924

:: Heft 1 :: Seite 1 bis 84

INHALT:



V·D·I-VERLAG G.M.B.H., BERLIN SW 19

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 4 | Ende Februar 1924 | Heft 1

Inhalt:

HAUPTAUFSÄTZE

Versuche über die Reibung fester Körper.

Von **G. SACHS** in Charlottenburg.

[Mitteilung aus dem Festigkeitslaboratorium der Technischen Hochschule Berlin.] [1])

Zwei Scheiben, die sich am Umfange unter Druck (Normalkraft) berühren, wie die Scheiben eines Reibungstriebes, rollen ohne zu gleiten aufeinander ab, solange die von einer auf die andere zu übertragende Umfangskraft einen bestimmten, von den Umständen abhängigen Bruchteil (Reibungsbeiwert) der Normalkraft nicht überschreitet. Dasselbe gilt von dem Rad eines Fahrzeuges, das sich auf ebenem Weg bewegt. Ist die Umfangskraft zu groß, so gleitet die eine Scheibe auf der anderen, eine Erscheinung, die allgemein bekannt ist. Dabei wird sich in der Regel das Gleiten dem Rollen überlagern. Weniger bekannt ist, daß die Triebräder eines Autos oder einer Lokomotive beim Anfahren und bei ruhiger Fahrt sich stets etwas schneller drehen [2]), als dem von dem Fahrzeug zurückgelegten Weg entspricht, daß also ein gewisses Gleiten immer vorhanden ist. Die treibende Scheibe (das Fahrzeugrad) legt einen etwas größeren Weg zurück als dem reinen Abrollen auf der getriebenen (der Fahrstraße) entsprechen würde [3]). Der Unterschied der beiden Wege, bezogen auf den von einer Scheibe zurückgelegten, wird allgemein als Schlupf oder Schlüpfung bezeichnet; in der vorliegenden Arbeit wollen wir unter Schlupf den Wegunterschied pro Umdrehung der treibenden Scheibe verstehen. Da bei den Versuchen der Umfang rund 950 mm war, gibt diese Zahl auch annähernd den Schlupf in vT des von der treibenden Scheibe zurückgelegten Weges an.

---

[1]) Die Versuche der vorliegenden Arbeit sind vom Verfasser auf Veranlassung von Hrn. Geh.-Rat Prof. Dr. Eugen Meyer im Festigkeitslaboratorium der T. H. Berlin ausgeführt worden. Für die Anregung zur Arbeit, sowie für die dauernde Unterstützung im Verlaufe der Versuche und bei der Ausarbeitung der Ergebnisse spreche ich Hrn. E. Meyer hierdurch meinen besten Dank aus.

[2]) Dies gilt auch fürs Bremsen, wenn man die Richtung des Bremsmomentes als positiv einführt, oder dann die Straße bezw. Schiene als treibende Scheibe ansieht.

[3]) Ueber den Einfluß der Normalkraft, von dem hier abgesehen wird, siehe die Ausführungen auf S. 14/15.



Das Auftreten von Schlupfen bei Automobilen wird zuweilen in der Literatur erwähnt [1]; am System Rad und Schiene ist es von Jahn [2] zum Gegenstand einer Untersuchung gemacht worden. Seine Versuche zeigen, daß das völlige Aussetzen bei Ueberschreitung eines bestimmten Wertes der Umfangskraft (Reibungskraft oder Reibungswert) eingeleitet wird durch das Auftreten von Schlupfen, die, wie Abb. 1 zeigt, mit der Umfangskraft in stärkerem Maße als diese zunehmend bis zu sehr kleinen Umfangskräften hinab festzustellen sind. Bei seiner Einrichtung, bei der das Abrollen einer stählernen Walze auf einer Stahlschiene untersucht wurde, beobachtete Jahn den Schlupf bei zunehmender Geschwindigkeit als annähernd konstant und führte ihn zur Erklärung dieser Tatsache auf tangentiale Formänderungen der Berührungsstelle unter dem Einfluß der Umfangskraft zurück. Andere Forscher [3]) suchten dagegen das Auftreten von Schlupfen in Zusammenhang zu bringen mit den Versuchen von Frl. Jacob [4]) und Skutsch [5]), die bei Gleitversuchen mit Glas auf Glas, Messing auf Messing und Stahl und Leder auf Eisen eine Zunahme der Gleitgeschwindigkeit mit zunehmender Reibungskraft (nach Abb. 2) beobachtet hatten.

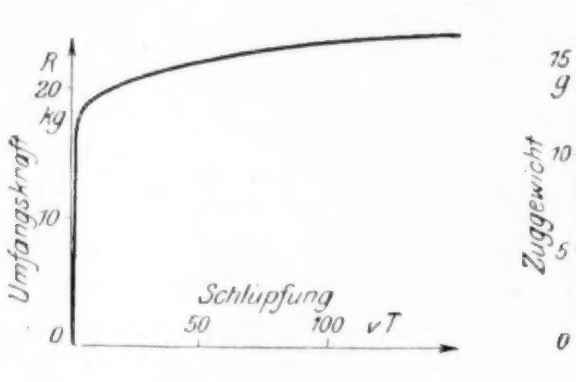


Abb. 1
Abhängigkeit der Reibung vom Schlupf (nach Jahn).

Abb. 2
Abhängigkeit der Reibung von der Gleitgeschwindigkeit bei Messing auf Messing (nach Jacob).

1. Uebersicht über den Versuchsbereich und die Ergebnisse. Der Nachteil der Jahnschen Anordnung, daß sie keinen Beharrungszustand herzustellen ermöglichte, war bei der zunächst zur Ausführung von Vorversuchen gebauten Versuchseinrichtung von Hrn. Eugen Meyer vermieden worden. Sie bestand aus zwei zylindrischen Scheiben, die jede um ihren Mittelpunkt drehbar gelagert waren, also einem sog. Reibungstrieb, und wird im folgenden Abschnitt beschrieben. Infolge einer eigentümlichen, nicht ohne völligen Umbau fortzuschaffenden Resonanzstörung, deren Untersuchung neues Licht auf die Bildung von Riffeln [6]) bei Schienen wirft, bot die Untersuchung des Einflusses der Drehzahl auf die Schlupfe erhebliche Schwierigkeiten. Dennoch glaubt der Verfasser für kleine Umfangskräfte die Jahnsche Beobachtung von ihrer Konstanz bestätigen zu können. Bei größeren Umfangskräften konnte bei einigen Stoffen Abnahme der Schlupfe mit zunehmender Drehzahl beobachtet werden, jedoch auch dann in geringerem Maße, als die Auffassung von der Entstehung der Schlupfe durch Gleiten allein verlangt. In diesen Fällen wird ein Teil des Schlupfes auf Gleiten zurückgeführt; hauptsächlich jedoch betrachtet Verfasser in grundsätzlicher Uebereinstimmung mit Jahn als Ursache der Entstehung von Schlupfen tangentiale Formänderungen der Scheiben an ihrer Berührungsstelle.

Abgesehen von technischen Unvollkommenheiten, wie z. B. der Unmöglichkeit, die verwendeten Scheiben zylindrisch zu schleifen und Hochglanz zu polieren, lag die Hauptschwierigkeit der Versuche in der häufig sehr raschen Veränderlichkeit der gemessenen Größen, hier Schlupf und Reibungskraft. Um nachprüfbare Ergebnisse zu bekommen, hielt es Verfasser für notwendig, dieser Veränderlichkeit, die anscheinend im Wesen des Reibungsvorganges begründet ist, nachzugehen. Mit Hilfe eines Mikroskops wurde die Oberfläche laufend beobachtet und ihre Aenderungen im Bilde festgehalten; gleichzeitig wurde die Größe des Reibungswertes, des Schlupfes u. a. Größen bei verschiedenen Verhältnissen (Umfangskraft, Drehzahl, Normalkraft usw.) verfolgt. Es zeigte

[1]) Löffler-Riedler, Reibungstriebwerke. München 1921, S. 4.
[2]) Z. d. V. D. I., Bd. 62, 1918, S. 121.
[3]) Stiel, Theorie des Riementriebs, Berlin 1918, S. 5.
[4]) Jacob, Ueber gleitende Reibung, Dissertation, Königsberg 1911, Annalen der Physik, 1912, S. 126.
[5]) Ueber die Reibung von Leder auf Eisen Dinglers Pol. J. 1914, S. 273, 305, 341, 355.
[6]) Stahl und Eisen, Bd. 37, 1917, S. 993, Bd. 41, 1921, S. 1181.

sich nun, daß bei den meisten Stoffen diese Veränderungen, die zunächst häufig sprunghaft, jedoch meist in einem Sinne vor sich gingen, bei Konstanthalten der übrigen Umstände allmählich schwächer wurden und nach einer Reihe von Versuchen den Charakter von — wenn auch erheblichen — Streuungen annahmen, so daß davon gesprochen werden konnte, daß die Oberfläche eine Art Beharrungszustand angenommen hatte.

Wenn es auch mit Rücksicht auf die zur Verfügung stehende Zeit nicht möglich war, bei allen Stoffpaaren festzustellen, ob sie sich einem solchen Beharrungszustand näherten und wie derselbe durch Aenderung der übrigen Bedingungen beeinflußt wurde, so ermöglichte die zunehmende Gleichmäßigkeit der Versuche, dem Einfluß der Normalkraft auf die Reibungswerte nachzugehen. Es ergab sich ausnahmslos, besonders deutlich dort, wo die Zahl der Versuche eine Mittelwertbildung gestattete, daß unter der Voraussetzung annähernd gleichbleibender Oberflächenbeschaffenheit der Reibungsbeiwert mit zunehmender Normalkraft abnahm. In einzelnen Fällen konnte sogar bei der Normalkraft 0 eine erhebliche Reibungskraft (Reibungsbeiwert $= \infty$) beobachtet werden; am höchsten bei Messing mit Gußeisen zu 0,61 kg. Dabei erwies sich die Oberflächenbeschaffenheit bei vielen Stoffen von der Normalkraft, Umfangskraft usw. kaum abhängig, d. h. nach erheblichen, längere Zeit anhaltenden Aenderungen in den Versuchsbedingungen blieben die unter bestimmten Verhältnissen gemessenen Reibungswerte annähernd die gleichen wie zuvor. Bei Messing mit Flußeisen (und Gußeisen) konnte dagegen eine deutliche Wirkung der Normalkraft, bei Gußeisen mit anderen Stoffen auch der Umfangskraft beobachtet werden.

Ein Einfluß der begrenzt veränderlichen Drehzahl auf die Reibungswerte konnte, wohl infolge der erheblichen Streuungen, nur bei Leder mit Metallen in bekanntem Sinne[1]) (Abb. 2) beobachtet werden, ein Einfluß der während der Versuche in geringem Maße zunehmenden Temperatur überhaupt nicht[2]).

Es erscheint nach den Ausführungen dieses Abschnittes verständlich, daß trotz der großen Zahl der zum Eindringen in diese Erscheinungen notwendig gewordenen Versuche die gefundenen Zahlenwerte nur bedingte Geltung haben, umsomehr, als infolge ungleichmäßiger Berührung und Abnutzung die Größe der Berührungsfläche starken Schwankungen unterlag und nicht festzustellen war. Immerhin scheinen die Versuche geeignet zu sein, in die Kenntnis einer Reihe von Reibungserscheinungen einzuführen und ihre Erkenntnis vorzubereiten.

Da der zur Verfügung stehende Raum zu einer Wiedergabe aller Versuchsergebnisse nicht ausreicht, werden nur die am besten belegten Ergebnisse in zwei Gruppen zusammengefaßt und besprochen. Die erste umfaßt die Veränderungen der Oberflächen und deren Einfluß auf die Reibungswerte, die zweite den Verlauf der Schlupfe bei verschiedenen Drehzahlen, Normalkräften und Umfangskräften. Zunächst sei jedoch eine Beschreibung der Versuchseinrichtung vorausgeschickt.

2. Beschreibung der Versuchseinrichtung. Die Versuchseinrichtung ist in Abb. 3 in Aufsicht, in Abb. 4 und 5 in schematischer Seitenansicht wiedergegeben.

Sie bestand im Wesentlichen aus 2 zylindrischen Scheiben A und B. Die Scheibe A wurde durch einen Elektromotor mittels eines Riementriebs angetrieben und nahm die Scheibe B durch Reibung mit. Die Scheibe B saß mit einer Bremsscheibe H und einer Diagrammscheibe P auf einer Welle W auf, deren linkes Auflager um die vertikale Achse C drehbar war. Am rechten Ende, das in einem Kugellager auf wagerechter Ebene verschiebbar war, griff senkrecht zur Welle das über die Rolle D geführte und mit dem Gewicht G belastete Seil an. Bedeuten $a_1 = 400$ mm und $a_2 = 300$ mm die Entfernungen der Seilrichtung und der Mittelebene der beiden Scheiben von der vertikalen Achse C, um die die getriebene Welle drehbar war, so wurden die beiden Scheiben mit der Normalkraft

$$P = G \cdot \frac{a_1}{a_2} = 1{,}33\ G$$

gegeneinandergedrückt.

Die von der treibenden Scheibe auf die getriebene zu übertragende Umfangskraft wurde durch ein die Bremsscheibe H einmal ganz umschlingendes Hanfseil hervorgerufen, das am auflaufenden Ende mit einem Gewicht belastet, am ablaufenden an einer Federwage befestigt war. Da die Durchmesser der Brems- und der treibenden Scheibe $= 2\,r$ innerhalb der Grenzen der Versuchsgenauigkeit übereinstimmten, gab die Differenz der

[1]) Vergl. Enz. d. math. Wissensch. Bd. IV, Artikel 10, R. v. Mises, S. 203 (s. Abb. 2).

[2]) Jacob, a. a. O., S. 58.

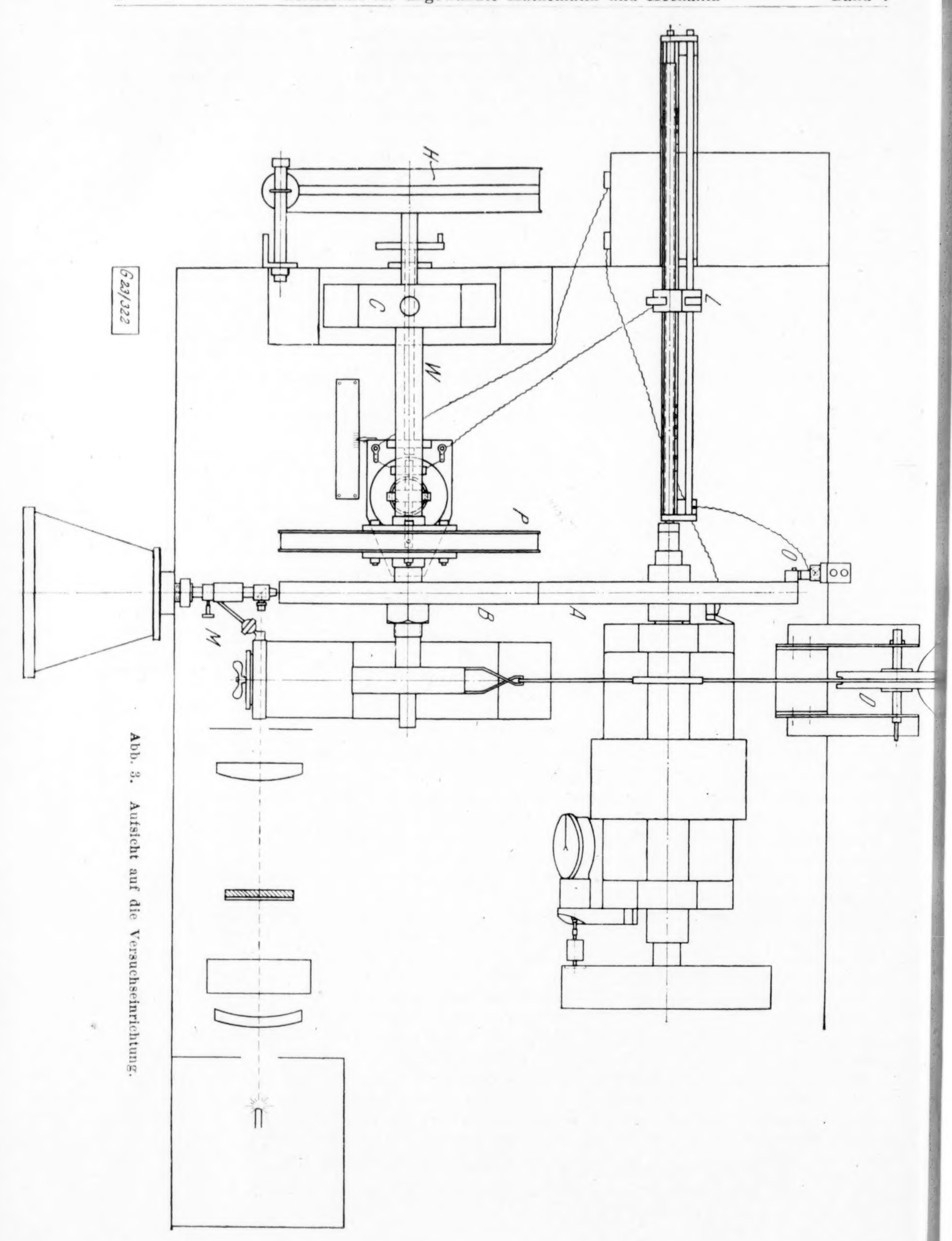


Abb. 3. Aufsicht auf die Versuchseinrichtung.

beiden Seilspannungen R_2, vermehrt um einen der Lagerreibung und einen der Rollreibung entsprechenden Betrag, die zu übertragende Reibungskraft oder Umfangskraft R an (Abb. 5):

$$R = R_2 + \frac{M}{r} + P \cdot \frac{c}{r},$$

worin c der Hebelarm der Rollreibung und M das Moment der Laggerreibung der angetriebenen Scheibe ist.

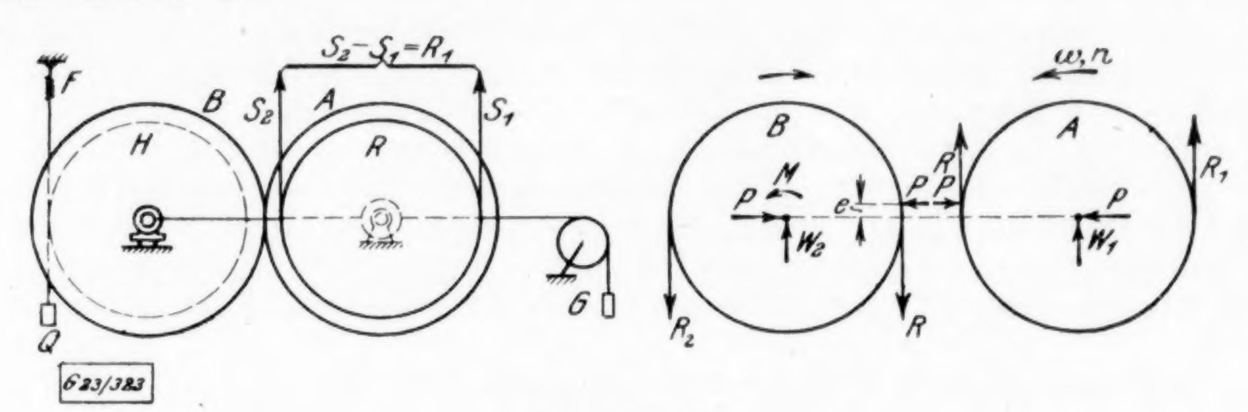


Abb. 4 und 5
Schematische Seitenansicht der Versuchseinrichtung.

War die zu übertragende Umfangskraft R größer als der Grenzwert der Reibung, so konnte die getriebene Scheibe B von der treibenden Scheibe A nicht mitgenommen werden und blieb stehen, die beiden Scheiben glitten übereinander weg (= reines Gleiten).

Um den Schlupf zu messen, war auf der getriebenen Welle W die Holzscheibe P aufgesetzt, um deren Mantelfläche ein Papierstreifen gelegt war. An der treibenden Scheibe befand sich ein Kontakt, der bei jeder Umdrehung einmal über eine auf dem Tisch angebrachte Feder schleifte, wodurch ein Stromkreis geschlossen werden und ein durch einen Elektromagneten bewegter Schreibstift einen Punkt (Abb. 6) auf dem Papierstreifen aufzeichnen konnte. Wären beide Scheiben gleich groß und ein Schlupf nicht vorhanden, so würden, wenn die Schreibvorrichtung nicht verrückt wird, die aufgezeichneten Punkte stets aufeinanderfallen. Im Allgemeinen sind jedoch zwei aufeinanderfolgende Punkte in der Umfangsrichtung gegeneinander um einen Betrag (= Bruttoschlupf) (Abb. 6a) verschoben, der sich zusammensetzt aus:

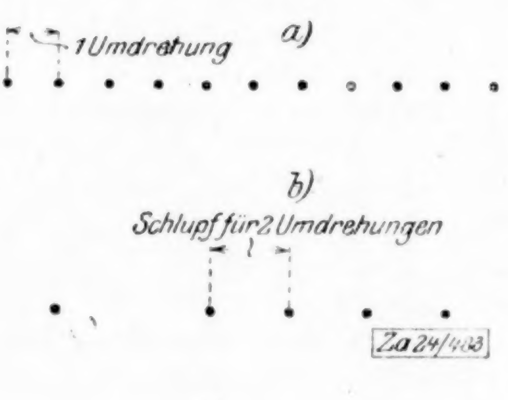


Abb. 6
Schlupfdiagramme für 10 Umdrehungen.

1. Umfangsunterschied der getriebenen und der treibenden Scheibe,
2. Wegunterschied der getriebenen und der treibenden Scheibe, hervorgerufen durch Formänderungen der Scheiben infolge der wirkenden Normalkraft,
3. Schlupf für die Reibungskraft R [1]).

Der Abstand der Punkte für $R = 0$ gibt die Größe der beiden ersten Einflüsse; um die wirklichen Schlupfe zu erhalten, ist diese Größe unter verschiedenen Bedingungen festzustellen und von den gemessenen Abständen abzuziehen. Bei kleineren Schlupfen kann man mit Hilfe eines Laufkontaktes L zwischen zwei Punktmarkierungen 2, 4 usw. bis 40 Umdrehungen vergehen lassen (Abb. 6b).

Um die Oberflächenbeschaffenheit der Scheiben, die laufend beobachtet wurde, auch im Bilde festzuhalten, wurde eine mikrophotographische Einrichtung M (Abb. 3) aufgebaut, die Aufnahmen in ca. 55facher Vergrößerung lieferte. Sie bestand hauptsächlich aus einem Mikroskop, einer Balgkammer und einer Bogenlampe.

Für die Versuche standen 2 Flußeisen-, 2 Gußeisen-, 1 Messing- und 1 Weißmetallscheibe, sowie 2 aus Segmenten zusammengeleimte Weißbuchenscheiben und 1 (nach Abb. 7) zwischen Eisenblech eingespannte Leder-

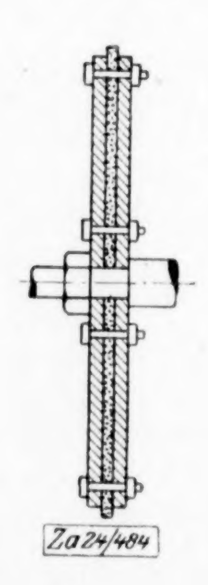


Abb. 7
Einspannung der Lederscheibe.

[1]) Die Trennung von Punkt 2 und 3 ist willkürlich und setzt eine Superposition der beiden Einflüsse voraus, die nicht erwiesen ist. Eine genauere Untersuchung des Zusammenhanges würde jedoch über den Rahmen dieser Arbeit hinausgehen.

scheibe zur Verfügung. Der Durchmesser der Scheiben schwankte zwischen 299,5 und 305,5 mm, die Breite war ursprünglich 25 mm, bei späteren Versuchen 2,5 und 1,0 mm. Die Lederscheibe war ~ 6 mm stark.

Die Laufflächen der verwendeten Scheiben wurden vor Beginn der Versuche sorgfältig poliert und die weiteren Versuche unter fortschreitender Abnutzung ausgeführt. Die polierte Oberfläche zeigte jedoch unter dem Mikroskop zahlreiche Schleifkratzer, auch, als die Politur nicht in der Werkstatt des Laboratoriums, sondern von einer namhaften Firma ausgeführt wurde. Um mechanische Verunreinigungen, besonders Fettspuren, zu entfernen, wurden die Metallscheiben mit Kalk, Alkohol, Aether und u. U. heißem Sodawasser gereinigt und mit Wattepapier abgerieben. Leider war auch ein genaues Aufeinanderlaufen der Scheiben in ihrer ganzen Breite von 25 mm nicht zu erreichen. Die Versuche ließen jedoch nicht erkennen, daß dadurch das gesetzmäßige Verhalten beeinträchtigt wurde. Dagegen erwiesen sich Unregelmäßigkeiten in der Härte der Scheibenoberflächen verschiedentlich als sehr störend. Bei den Versuchen mit den geringeren Breiten von 2,5 und 1,0 m liefen die Scheiben meist auf der ganzen Breite aufeinander.

Um die untersuchten Stoffe zu kennzeichnen, wurden die verwendeten Metalle chemisch analysiert und auf Härte geprüft. Holz wurde einem Zerreißversuch unterworfen.

Die Ergebnisse waren[1]):

Flußeisen:	Chemische Zusammensetzung:	0,22 vH C; 0,15 vH Si; 0,51 vH Mn; 0,03 vH P; 0,04 vH S; 0,14 vH Cu.
	Härte:	$P = 57 \cdot d^{2,26}$ [2]); $H_{3000} = 104$ [3]).
Gußeisen:	Chemische Zusammensetzung:	2,89 vH C (2,87 vH Grafit); 2,93 vH Si; 0,33 vH Mn; 0,79 vH P; 0,127 vH S; 0,07 vH Cu.
	Härte:	$P = 85 \cdot d^{2,20}$; $H_{3000} = 141$.
Messing:	Chemische Zusammensetzung:	69,31 vH Cu; 30,04 vH Zn; 0,29 vH Pb; 0,17 vH Snb; 0,10 vH Fe.
	Härte:	$P = 18 \cdot d^{2,4}$ (Eindrücke fast viereckig)[4]); $H_{1000} = 41$.
Weißmetall:	Chemische Zusammensetzung:	2,44 vH Cu; 45,72 vH Pb; 38,41 vH Sn; 13,64 vH Sb.
	Härte:	$P = 15 \cdot d^{2,05}$ (unrunde Eindrücke); $H_{500} = 19$.
Holz:	Weißbuche (Faser): . . .	Zugfestigkeit: ~ 1600 kg/cm²; Elastizitätsmodul: ~ 160 000 kg/cm²; Proportionalitätsgrenze: ~ 550 kg/cm².

A) Oberflächenbeschaffenheit und Reibungswerte.

3. Abnutzungserscheinungen und Beharrungszustand. Bei allen Stoffen änderte sich im Laufe der Versuche die Beschaffenheit der der Reibung ausgesetzten Oberfläche. Welchen Einfluß hierbei die Art des Bewegungszustandes (= Größe des Schlupfes (g) : $g = o$ = Reines Rollen; $g = 2\,\pi\,r$ = Reines Gleiten), die Größe der Normalkraft usw. ausübten, konnte nicht im Einzelnen untersucht werden. Die Wirkung des reinen Gleitens darf wohl für den endgültigen Zustand der Oberfläche als ausschlaggebend angenommen werden. Beim reinen Rollen waren nur bei großen Normalkräften Veränderungen zu beobachten, die auf bleibende Formänderungen infolge Ueberschreitung der Quetschgrenze hindeuteten (z B. Mattwerden bei Flußeisen). Bei relativ hohen Umfangskräften, d. h. großen Schlupfen, wurden keine anderen Beobachtungen wie beim reinen Gleiten gemacht. Die vom Verfasser beobachteten und im Bilde festgehaltenen Oberflächenänderungen können daher nur einen kleinen Ausschnitt aus der Mannigfaltigkeit solcher Veränderungen (Abnutzungserscheinungen) geben. Da sie an anderer Stelle[5]) schon veröffentlicht sind, sei hier mit Rücksicht auf den Raummangel auf ihre Wiedergabe verzichtet.

Die unmittelbare, durch Aufnahmen gestützte Beobachtung scheint zu ergeben, daß die Oberflächenbeschaffenheit der meisten Stoffe, wenigstens des weicheren jedes Stoff-

---

[1]) Es ist nach Ausführung weiterer Reibungsversuche beabsichtigt, die Zug- und Druckfestigkeit, den Elastizitätsmodul usw. der Scheibenstoffe festzustellen.

[2]) Nach Eugen Meyer, Forschungsarb. d. V. d. I., Heft 65. Die zur Erzielung des Eindruckes aufzuwendende Kraft P ergibt sich in kg, wenn der Durchmesser d des Eindruckkreises in mm eingesetzt wird. Die Härte in kg/mm² erhält man, indem man P durch die Fläche des Eindruckkreises in mm² dividiert.

[3]) Nach Brinell. 10 mm Kugel, 30 Sekunden Belastungsdauer. Der Index gibt die Belastung in kg.

[4]) Die nachträgliche Untersuchung auf Druck ergab in Uebereinstimmung damit eine ganz unregelmäßige Gestalt nach der Deformation. Das Messing war also offenbar sehr grobkristallinisch, da gestauchte Vielkristallproben stets Tonnenform annehmen.

[5]) Maschinenbau, Bd. 3, 1923/24, S. 168.

paares [1]) nach einer Reihe von Versuchen gleich bleibt; in dem Sinne, daß weiterschreitende Abnutzung im großen Ganzen immer wieder den gleichen Zustand herstellt. Für die Beurteilung der Beschaffenheit einer Oberfläche fehlt bisher jeder Maßstab. Aus den Versuchen scheint jedoch hervorzugehen, daß die Reibungswerte zur Beurteilung des Zustandes einer Oberfläche geeignet und ein viel empfindlicherer Anzeiger für Veränderungen sind, als das unbewaffnete oder bewaffnete Auge. Wenigstens insoweit, als ein Gleichbleiben des Reibungswertes auch auf ein Gleichbleiben der Oberflächenbeschaffenheit im obigen Sinne zu schließen erlaubt. In Zahlentafel 1 sind bei einigen Stoffen eine Anzahl unter gleichen Bedingungen ($P = 6{,}67$ kg) beobachteten Reibungsbeiwerte μ zusammengestellt. Das Verhalten der Werte

Zahlentafel 1. Reibungswerte.

Messing — Flußeisen			Weißmetall — Gußeisen			Holz — Holz		
Versuch	μ	Bemerkungen	Versuch	μ	Bemerkungen	Versuch	μ	Bemerkungen
19	0,26		273	0,29		141	0,58	
26	0,36		274	$0{,}29^5$		143	0,57	
29	0,42		275	0,30		145	0,56 ?	
33	0,52	vorher $P = 40{,}0$ kg	276	0,31		158	$0{,}54^5$	
35 a	0,53	vorher $P = 26{,}7$ kg	277	0,31		200	0,50	nach Versuchen Holz mit Metallen
b	0,50		278	$0{,}31^5$		210	0,50	
36	0,46		281	0,30		213	0,51	
			282	$0{,}29^5$				
39	0,58	vorher $P = 26{,}7$ kg	283	$0{,}30^5$				
40	0,49		286	0,30				
			287	0,31	nach mehrstünd. Gleiten bei $P = 40{,}0$ kg			

von Weißmetall mit Gußeisen bestätigt den Augenschein, daß die Oberflächenbeschaffenheit schließlich annähernd gleichbleibt. Nach anfänglich geringer Erhöhung schwankte der Reibungswert im weiteren Verlauf der Versuche nur um einen geringen Betrag (± 3 vH). Anders bei Messing mit Flußeisen. Zunächst wuchs der Reibungswert beträchtlich. Nach einiger Zeit (nach vollendeter Zerstörung der Oberflächenpolitur) änderte er sein Verhalten: Er war zu Beginn des neuen Versuches, z. B. 35, sehr hoch, fiel dann aber allmählich, derart, daß nach einiger Zeit bei gleichbleibenden Bedingungen der Reibungswert einem konstanten und bei verschiedenen Versuchen gleichen Wert zustrebte, was aus Tafel 1 nur unvollkommen hervorgeht. Die Verhältnisse bei Messing mit Flußeisen, sowie auch bei Gußeisen mit Flußeisen und Gußeisen sind demnach verwickelter und werden weiter unten besprochen. Bei Holz mit Holz, stärker noch bei Versuchen mit Leder war auch nach längerer Versuchsdauer noch eine langsame Aenderung des Reibungswertes in einem Sinne zu erkennen. Bei Flußeisen mit Flußeisen wurde ein Beharrungszustand nicht erreicht. Die Reibungskraft stieg unter immer tiefergehendem Einfressen der beiden Scheiben ineinander und überstieg nach kurzer Zeit die Normalkraft.

4. Normalkraft und Reibungskraft. Da die Reibungszahl sich jedoch rasch bestimmen ließ, verhinderten diese langsamen Aenderungen nicht die Untersuchung des Zusammenhanges zwischen Normalkraft und Reibungskraft, deren Ergebnisse in Auswahl in Zahlentafel 2 und Abb. 9 bis 14 wiedergegeben sind. Selbst bei den sich unregelmäßig verhaltenden Stoffpaaren, wie z. B. Messing mit Gußeisen, war es unter Umständen bei sehr rascher Vornahme der Versuche möglich, Ergebnisse zu gewinnen, die regelmäßig waren und mit denen bei anderen Stoffen übereinstimmten. Unter der Voraussetzung annähernd gleichbleibender Oberflächenbeschaffenheit verhielten sich alle Stoffe insofern gleichartig, als der Reibungsbeiwert μ mit zunehmender Normalkraft abnahm. Für Metalle (Abb. 9 bis 12) war der Zusammenhang zwischen Reibungskraft R und Normalkraft P annähernd linear und ließ sich durch den Ausdruck befriedigend wiedergeben:

$$R = \mu_\infty \cdot P + R_0,$$

worin μ_∞ und R_0 Konstanten sind, deren Bedeutung aus Abb. 8 ersichtlich ist und weiter

[1]) Da an den härteren Stoffen z. T. kaum Veränderungen wahrzunehmen waren, kann wohl angenommen werden, daß ihre Oberflächenbeschaffenheit sich so langsam änderte, daß ein Einfluß und Sinn etwaiger Veränderungen keine Rolle spielte.

Zahlentafel 2. Reibungswerte.

(Bei einer Gleitgeschwindigkeit von $v = 0,55$ m/sec.) b = Scheibenbreite.

Normalkraft P	Gußeisen — Flußeisen $b = 25$ mm, Reibungskraft R^{kg}_{max}						Reibungsbeiwert μ	Messing — Gußeisen $b = 25$ mm, Reibungskraft R^{kg}_{max}			Messing — Gußeisen, Reibungsbeiwert μ			Weißmetall — Flußeisen, $b = 25$ mm V 77 b		Weißmetall — Flußeisen, $b = 2,5$ mm V 383		
kg	V [1]) 426 a	V 426 b	V 427 a	V 427 b	V 428	Mittelwert	μ	V 97	V 102	V 103/06	V 97	V 102	V 103/06	R^{kg}_{max}	μ	R^{kg}_{max} a	R^{kg}_{max} b	μ
0									0,61			∞						
0,67	0,27		0,23	0,30		0,27	0,405									0,26	0,25	0,38
1,33	0,455	0,45	0,39			0,435	0,33	0,33	0,93	—	0,25	0,70				0,46	0,46	0,345
2,67	0,78	0,81	0,73	0,81		0,78	0,29	0,61	0,16	1,00	0,23	0,43	0,375	0,88	0,33	0,88	0,88	0,33
4,0	1,08	1,11	1,03			1,07	0,27									1,31	1,31	0,33
5,33																		
6,67	1,70	1,495 1,585	1,70	1,87	1,81	1,71	0,26	1,39	1,91	1,82	0,21	0,29	0,27	2,18	0,33	2,12	2,12	0,32
9,33		2,15	2,32			2,235	0,24									2,91	2,91	0,31
13,33		2,98	3,26	3,34	3,33	3,14	0,235	2,58	3,24	3,05	0,195	0,24	0,23	4,30	0,32	4,06		0,305
20,0			4,48			4,48	0,22											
26,67			5,81		6,05	5,93	0,22	5,05	5,76	5,37	0,19	0,22	0,20	~8,2	0,31			
40,0																		
53,33								~10,1			0,19							

Normalkraft P	Weißmetall — Gußeisen, $b = 25$ mm, Reibungskraft R^{kg}_{max}									Reibungsbeiwert μ	Weißmetall — Gußeisen, $b = 0,5$ mm, R^{kg}_{max}				Weißmetall - Messing, $b = 25$ mm, V 486	
kg	V 277 a	V 277 b	V 278	V 281 a	V 281 b	V 282	V 286	V 287	Mittelwert	μ	V 437	V 438	V 439	μ	R^{kg}_{max}	μ
0																
0,67	0,28	0,27	0,31	0,25	0,32		0,27	0,29	0,285	0,43	0,20	0,20		0,30	0,27	0,41
1,33	0 50	0,49	0,53	0,46	0,47	0,44	0,45	0,51	0,48	0,36	0,45	0,42		0,32[5]	0,51	0,38
2,67	0,92	0,86	0,98	0,84	0,87		0,86	0,90	0,89	0,33	0,86	0,84		0,32	0,94	0,35
4,0	1,33	1,29	1,39						1,34	0,335	1,27	1,27		0,32	1,36	0,34
5,33	1,72	1,68							1,70	0,32						
6,67	2,08		2,10	1,92 2,0	2,01	1,91	1,99	2,06	2,01	0,30	2,18	2,08		0,32	2,30 2,24	0,34
9,33												2,85		0,30[5]		
13,33			3,98	3,99	3,87	3,84	3,95	4,07	3,95	0,295		3,94	3,82 4,05	0,29	4 20	0,32
20,0			5,88	5,90	5,99			6 04	5,95	0,30		5,83	5,63 5,75	0,29		
26,67			7,48	7,67	7,72	7,64	7,82	8,08	7,735	0,29					7,95	0,30
40,0							11,56	11,66	11,61	0,29						
53,33																

Normalkraft P	Holz — Holz, Reibungskraft R^{kg}_{max}				Holz — Holz, Reibungsbeiwert μ		Holz — Weißmetall, Reibungskraft R^{kg}_{max}							Holz — Weißmetall, Reibungsbeiwert μ			
kg	V 210 a	V 210 b	V 213 a	V 213 b	V 210	V 213	V 190 a	V 190 b	V 191	V 194 a	V 194 b	V 195 a	V 195 b	V 190	V 191	V 194	V 19[illegible]
0																	
0,67								0,43	0,47	0,50		0,46		0,645	0,705	0,75	0,69
1,33	0,71	0,72	0,76		0,535	0,57	0,83	0,83	0,86	0,89	0,89	0,87	0,87	0,62	0,645	0,67	0,65
2,67	1,43	1,42	1,46	1,46	0,53	0,55	1,52	1,56		1,67	1,64	1,64 1,61	1,60	0,58		0,62	0,61
4,0	2,09	2 10	2,14	2.15	0,51	0,535	2,26	2,27	2,30	2,37	2,38	2,35	2,34	0,565	0,575	0,595	0,58
5,33							2,94	2,97						0,555			
6,67	3,33	3,37	3,44 3,40	3,43	0,50	0,51	3,62	3,64	3,72	3,86	3,83	3,80	3,78 3,82	0,545	0,56	0,58	0,57
9,33			4,69	4,68		0,50			4,99 5,02	5,17	5,25				0,54	0,56	
13,33	6,42	6,43	6,59	6,65	0,48	0,50			7,03	7,22	7,26				0,53	0,54	
20,0			9,57	9,76		0,49											
26,67			~12,7 12,38	12,85		0,475											
40,0																	
53,33																	

Noch: Zahlentafel 2. **Reibungswerte.**

Normalkraft P kg	Leder — Holz						Leder — Gußeisen							
	Reibungskraft R^{kg}_{max}			Reibungsbeiwert μ			Reibungskraft R^{kg}_{max}					Reibungsbeiwert μ		
	V 326	V 327	V 335	V 326	V 327	V 335	V 305 a	V 305 b	V 315	V 366 [3] a	V 366 [3] b	V 305	V 3.5	V 366
0														
0,67	0,18	0,15	0,16	0,27	0,225	0,24	0,22	0,16	0,21	0,38	0,40	0,285	0,315	0,585
1,33	0.33	0,285	0,28	0,25	0,21	0,21	0,40	0,37	0,41	0,55	0,59	0,29	0,31	0,39
2,67	0 58	0,50	0,50	0,22	0,19	0,19	0,70	0,70	0,74	0,94	1 02	0,26	0,28	0,37
4,0	0,83	0,72	0,66	0,21	0,18	0,165	1,02	1,02	1,05	1,35	1,41	0,255	0,26	0,345
5,33														
6,67	1,32	1,14	1,07	0,20	0,17	0,16	1,59	1,56	1,66	2,09	2,21	0,24	0,25	0,32
9,33	(1,77)	1,53	1,45	(0,19)	0,16	0,155	2,13	2,13	2,19	2,81	2,93	0,23	0,235	0,31
13,33	(2,31)	2,06	1,97	(0,17)	0,155	0,15	2,92	2,93	3,02	3,83	3,98	0,22	0,225	0,29
20,0	(3,23)	2,97	2,72[2]	(0,16)	0,15	0,14	4,19	4,23	4,40	5,71	5,75	0,21	0,22	0,29
26,67		3,86	3,55		0,145	0,13	5,45		5,60	7,23		0,20	0,21	0,27
40,0			4,99			0,125			8,01				0,20	
53,33			~6,3			~0,12			10,55				0,20	

[1]) V = Versuch.
[2]) Vorher 1. Versuch $R_{max} = 3,01$ kg.
[3]) Zwischen V 315 und V 366 liegen Versuche Leder — Holz.

unten erläutert wird. Der Reibungsbeiwert wuchs also mit abnehmender Normalkraft hyperbolisch an:

$$\mu = \frac{R}{P} = \mu_\infty + \frac{R_0}{P}.$$

Bei Holz und Leder mit Holz und Metallen ist der Abfall der Reibungsbeiwerte mit zunehmender Normalkraft stärker; die Abb. 13 bis 14 zeigen dementsprechend gekrümmte, zur Abszissenachse offene Linienzüge. Für Gußeisen mit Flußeisen stellen die Werte Grenzwerte dar, deren Bedeutungen aus den Darlegungen auf S. 22 klarwerden wird.

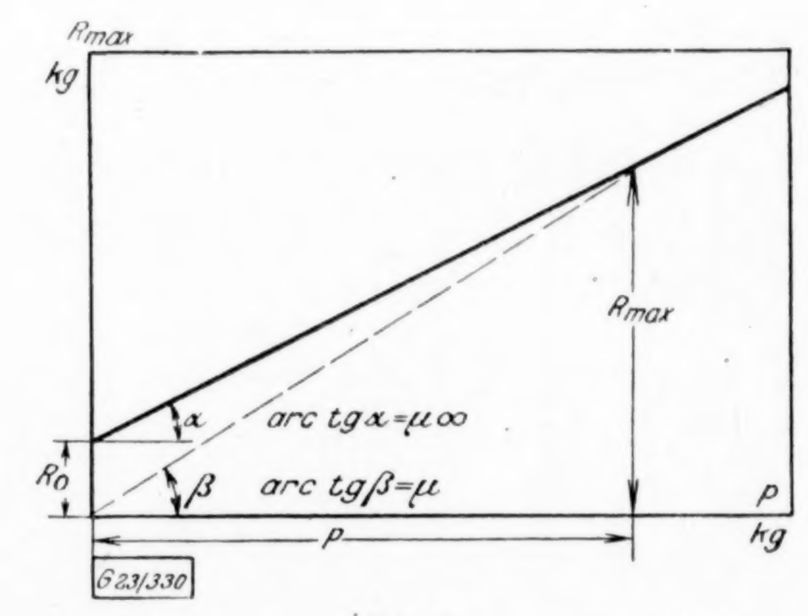


Abb. 8
Reibungswert in Abhängigkeit von der Normalkraft.

Bei Messing mit Flußeisen war es, wie gesagt, notwendig, die Normalkraft ($= P_{stab}$) einige Zeit konstant zu halten, um annähernd gleichbleibende und bei gleichen Bedingungen gleiche Reibungswerte ($= R_{stab}$) zu bekommen (Zahlentafel 3). War nämlich vorher die Normalkraft größer als P_{stab}, so war zunächst auch der Reibungswert größer als R_{stab} und fiel dann allmählich bis auf R_{stab} ab; war die Normalkraft vorher kleiner als P_{stab}, so war auch der Reibungswert vorher kleiner als R_{stab} und stieg dann bis auf R_{stab}. Daher ließ man erst eine geraume Zeit die treibende Scheibe an der sich ganz langsam drehenden getriebenen bei einer Normalkraft P_{stab} vorbeigleiten und nahm dann rasch bei verschiedenen Normalkräften die Reibungswerte auf, die demnach zu dem durch P_{stab} erzeugten Oberflächenzustand gehören. Je nachdem welche Normalkraft P_{stab} beim Abschleifen wirksam gewesen war, konnte dann unter sonst gleichartigen

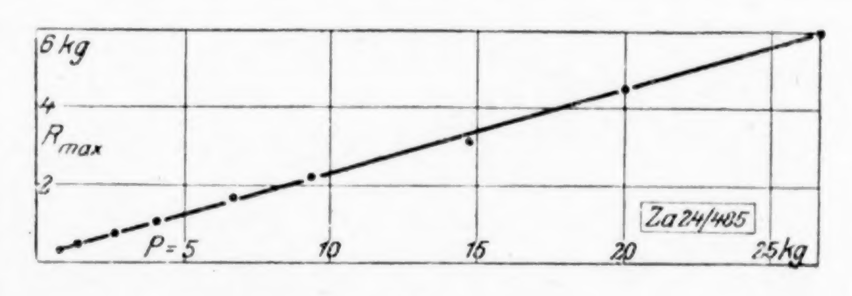


Abb. 9
Reibungswerte von Gußeisen mit Flußeisen (Vers. 426/28).

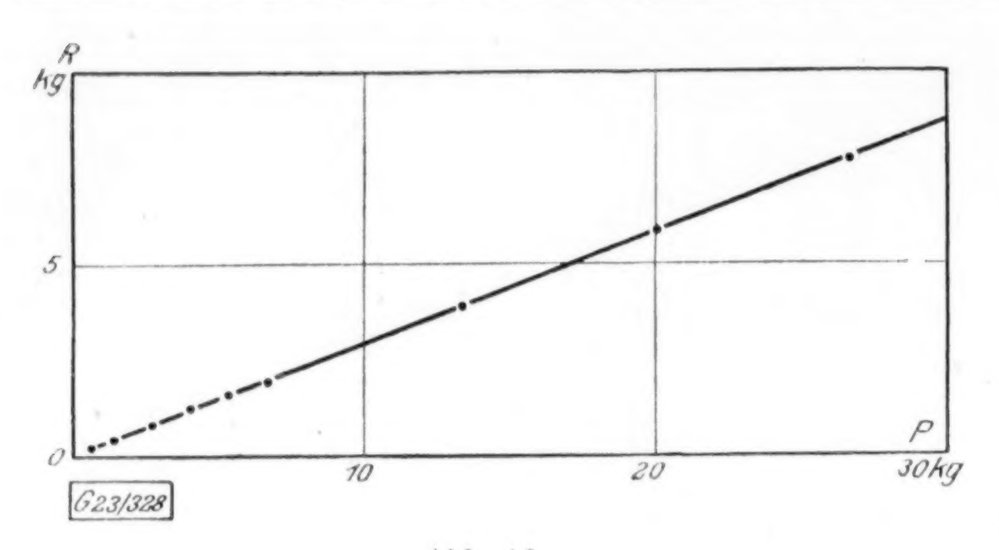


Abb. 10
Reibungswerte von Weißmetall mit Gußeisen (Vers. 277/78, 281/83, 286/87).

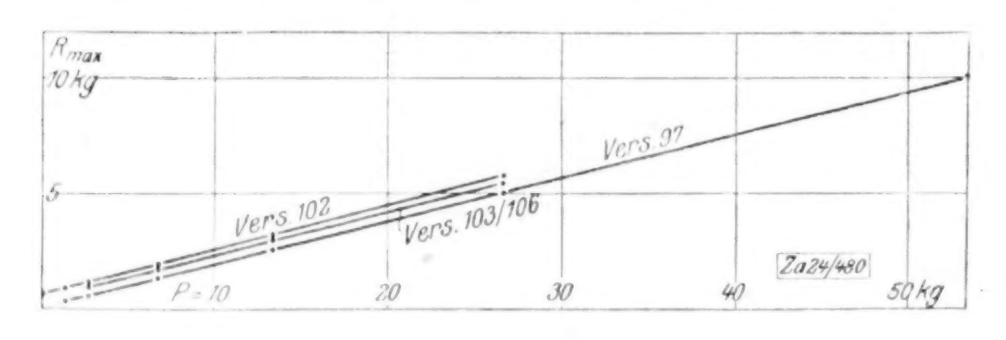


Abb. 11
Reibungswerte von Messing mit Gußeisen.

Bedingungen wesentlich verschiedene Reibungswerte, bezw. Reibungsbeiwerte festgestellt werden, z. B. für $P = 13,3$ kg (Zahlentafel 4):

$\mu = 0,42$, wenn unmittelbar vorher $P = 6,67$ kg,

$\mu_{stab} = 0,45$, wenn vorher $P = 13,33$ kg,

$\mu = 0,47$, wenn unmittelbar vorher $P = 20,0$ kg wirksam war.

Demnach änderte sich also die Oberflächenbeschaffenheit von Messing, wenn man die Normalkraft beim Abschleifen veränderte. Die Oberfläche wurde »rauher«, d. h. die Reibungswerte erhöhten sich, wenn die Abschleif-Normalkraft vergrößert wurde und im umgekehrten Falle wurde sie »glatter«. Wie Abb. 11 (Zahlentafel 3) zeigt, liegen die einer jeden solchen Oberflächenbeschaffenheit, die also gekennzeichnet ist durch die Normalkraft P_{stab}, bei der längere Zeit das Abschleifen vorgenommen wurde, zugewiesenen Werte wieder annähernd auf je einer Geraden, und zwar:

$$P_{stab} = 6,67 \text{ kg}, \quad R = \sim 0,10 + 0,40\,P,$$
$$P_{stab} = 13,33 \text{ kg}, \quad R = \sim 0,27 + 0,42\,P,$$
$$P_{stab} = 20,0 \text{ kg}, \quad R = \sim 0,31 + 0,43\,P,$$
$$P_{stab} = 26,67 \text{ kg}, \quad R = \sim 0,39 + 0,43\,P,$$
$$P_{stab} = 33,33 \text{ kg}, \quad R = \sim 0,45 + 0,44\,P.$$

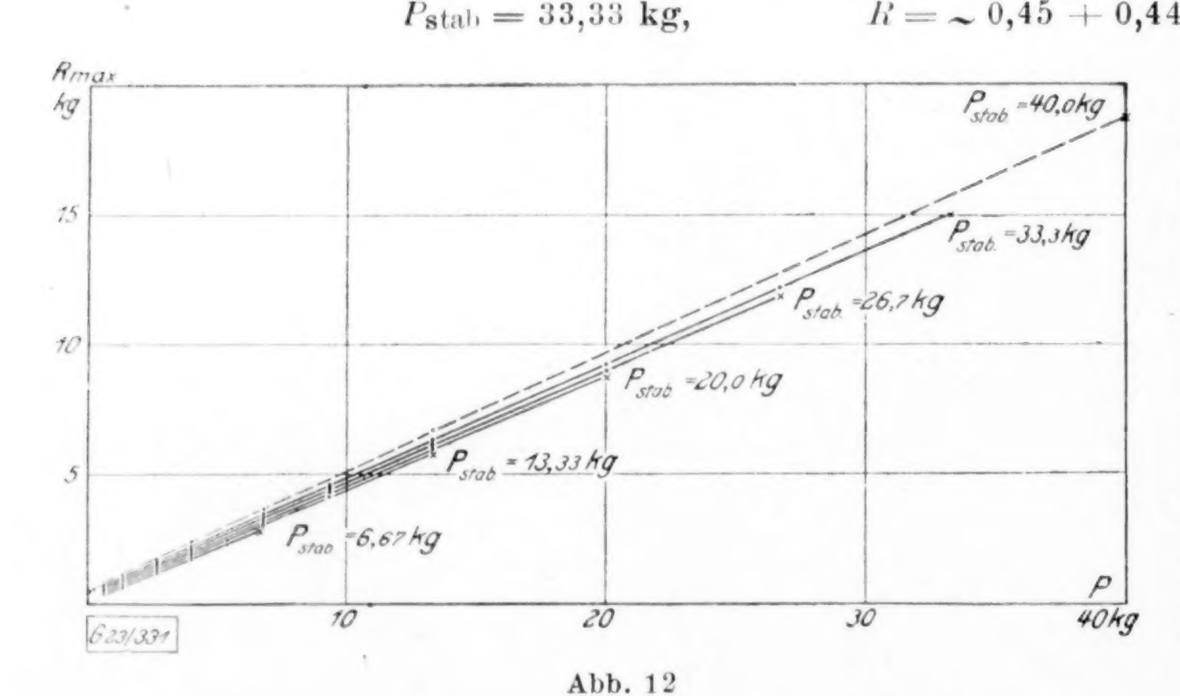


Abb. 12
Reibungswerte von Messing mit Flußeisen (Vers. 43/52).

Mit wachsender Abschleifkraft nehmen die Neigungen μ_∞ der Geraden nur unwesentlich, die Konstanten R_0 erheblich zu. Zahlentafel 4 gibt eine Wiederholung der Versuche aus Zahlentafel 3 wieder, die nach einiger Zeit abgebrochen werden mußte. Wie Abb. 15 zeigt, wies die in der Werkstatt einer nahmhaften Firma ausgeführte Politur viele Risse auf, in die sich das abgespante Messing besonders stark hineinfraß und so wahrscheinlich die Versuche störte. In den ersten Versuchen stimmt Zahlentafel 4 unter Berücksichtigung des Umstandes, daß die Laufbreite der Scheiben etwas kleiner war als bei den Versuchen der Zahlentafel 3 befriedigend mit dieser überein. Zahlentafel 3 ergänzend, zeigt sie weiter, daß auch bei Erhöhung der Normalkräfte über P_{stab} hinaus die Reibungswerte weiter annähernd linear mit der Normalkraft zunahmen, obwohl diese Feststellung dadurch erschwert wurde, daß dann die Oberflächenänderungen erheblich schneller vorsichgingen, als bei Verminderung der Normalkraft.

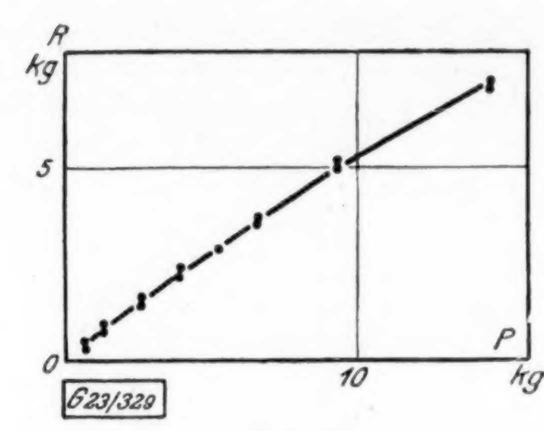


Abb. 13 Reibungswerte von Holz mit Weißmetall (Vers. 190/91, 194/95).

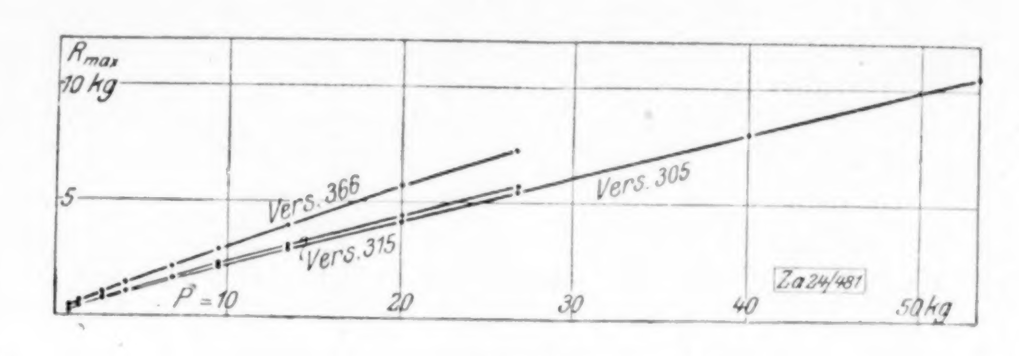


Abb. 14
Reibungswerte von Leder mit Gußeisen.

Zahlentafel 3. Reibungswerte von Messing mit Flußeisen.

P	P_{stab} = 6,67 kg						P_{stab} = 13,33 kg						P_{stab} = 20,0 kg			
	R_{max}^{kg}					μ	R_{max}^{kg}					μ	R_{max}^{kg}			μ
	V [1]) 47		V 48		Mittelwert		V 45		V 49		Mittelwert		V 50		Mittelwert	
kg	a	b	a	b			a	b	a	b			a	b		
0,133																
0,267																
0,67	0,48	0,48	0,37	0,41	0,435	0,65			0,54	0,53	0,535	0,80	0,61	0,54	0,575	0,86
1,33	0,80	0,79	0,62	0,69	0,735	0,55	0,81	0,86	0,80	0,82	0,82	0,62	0,89	0,89	0,89	0,67
2,67	1,30	1,31	1,20	1,25	1,265	0,47	1,30	1,48	1,34	1,45	1,39	0,52	1,42	1,50	1,46	0,55
4,0	1,78	1,89	1,69	1,75	1,775	0,44	1,84		1,82	1,99	1,88	0,47	1,99	2,14	2,065	0,51
5,33	2,33	2,38	2,23	2,33	2,32	0,44	2,39	2,61			2,50	0,47				
6,67	2,87		2,82		2,84	0 43	3,08		2,90	3,20	3,045	0,46	3,11	3,29	3,20	0,48
8,0							3,56	3,78			3,67	0,46				
9,33							4,20		3,99	4,29	4,16	0,45	4,25	4,48	4,365	0,47
10,67							4,80	4,89			4,845	0,45				
12,0							5,38					0,45				
13,33							5,96		(5,72)	5,65	5,77	0,43	5,85	6,18	6,015	0,45
20,0													(8,70)	8,76	8,73	0,44
26,67																

P	P_{stab} = 26,67 kg					P_{stab} = 33,33 kg							P_{stab} = 40,0 kg		
	R_{max}^{kg}				μ	R_{max}^{kg}						μ	R_{max}^{kg}		μ
	V 43	V 51		Mittelwert		V 44	V 46	V 52			Mittelwert		V 41	V 42	
kg		a	b					a	b	c					
0,133										0,45	0,45	3,38			
0,267										0,55	0,55	2,06			
0,67		0,64	0,71	0,675	1,01		0,58	0,78	0,83	0,75	0,745	1,11			
1,33	1,02	0,91	1,00	0,98	0.74	0,94	0,93	1,11	1,13		1,03	0,77			
2,67	1,72	1,49	1,60	1,60	0,60	1,60	1,72	1,77	1,76		1,71	0,64			
4,0	2,28	2,09	2,18	2,18	0,55	2,21		2,37	2,39		2,36	0,59			
5.33	3,05 ?				0,57 ?	[2,88]						[0,54]			
6,67	3,67	3,32	3,42	3,47	0,52	3,54	3,58	3,48	3,70		3,58	0,54		3,88	0,58
9,33	4,52				0,49	[4,66]						[0,50]			
13,33	6,10	6,08	6,38	6,19	0,47	6,42	6.54	6,44	6,56		6,48	0,49		6,75	0,51
20,0		8,80	9,21	9,005	0,45	9,07	9,10	9,09	9,50		9,19	0,46			
26,67	11,37	[11,89]	12,10	11,79	0,44	11,73		12,26	12,67		12,22	0,46			
33,33						[14,01]	14,66	15,46	15,42		14,89	0,45	[19,2]		0,48
40,0															

[1]) V = Versuch.

Zahlentafel 4. Reibungswerte von Messing mit Flußeisen.

P	$P_{stab} = 6,67$ kg			$P_{stab} = 13,33$ kg			$P_{stab} = 20,0$ kg				$P_{stab} = 26,67$ kg		$P_{stab} = 13,33$ kg	
	R_{max}^{kg} V [1]) 253		μ	R_{max}^{kg} V 254		μ	V 260		V 265		V 266		V 270	
kg	a	b		a	b		R_{max}^{kg}	μ	R_{max}^{kg}	μ	R_{max}^{kg}	μ	R_{max}^{kg}	μ
0,67	0,44		0,66	0,50	0,50	0,75	0,56	0,84	0,29	0,435	0,30	0,45	0,27	0,405
1,33	0,75	0,70	0,54	0,83	0,79	0,61	0,90	0,675	0,63	0,47	0,69	0,52	0,67	0,50
2,67	1,27	1,28	0,48	1,41	1,41	0,53	1,67	0,625	1,27	0,475	1,38	0,52	1,40	0,525
4,0	1,80	1,78	0,45	2,02	1,96	0,50	{ [2,01] 2,13	0,53	2,03	0,51	1,98	0,495	2,04	0,51
6,67	2,91	2,87	0,435	3,18	3,10	0,47	3,23	0,48	3,21	0,48	{ 3,21 3,24	0,48	3,25	0,48
9,33		4,02	0,43	4,27	4,25	0,455	4,49	0,48	4,41	0,47	4,57	0,49	4,47	0,48
13,33		5,62	0,42	5,99	6,01	0,45	6,25	0,47	6,24	0,47	{ 6,34 6,34	0,475	6,25	0,47
20,0					8,85	0,44	{ 9,24 9,22	0,46	{ [9,43] 9,21	0,46	~ 9,6	~ 0,48		
26,67									~ 12,1	0,455	~ 12,4	~ 0,46		
33,33											~ 16,8	~ 0,50		

[1]) V = Versuch.

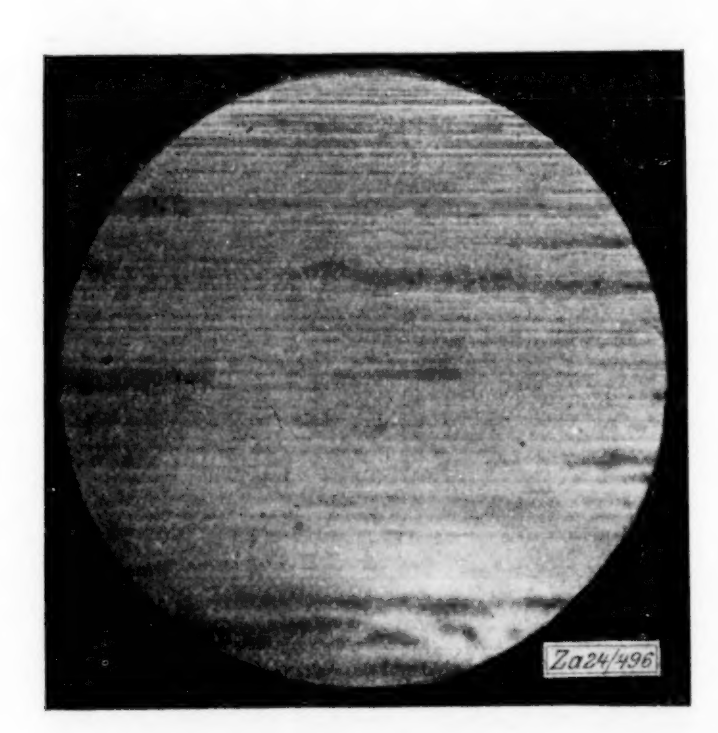


Abb. 15

Schlecht polierte Oberfläche von Flußeisen.

5. Reibungsbeiwerte. In Zahlentafel 5 [2]) sind die bei den höchsten aufgewendeten Normalkräften im Beharrungszustand beobachteten Reibungsbeiwerte μ, sowie in Klammern soweit abweichend die Konstanten μ_∞ für alle Fälle, wo keine spanbringende Zerstörung der Oberfläche vorsichging, zusammengestellt. Die Werte μ_∞ bedeuten diejenigen Reibungsbeiwerte, denen sich die gefundenen mit zunehmender Normalkraft asymptotisch nähern (vergl. S. 9, Abb. 8). Die Zahlentafel läßt gewisse Andeutungen von Gesetzmäßigkeiten erkennen, so z. B. daß jeder Stoff mit sich selber einen kleineren Reibungswert aufzuweisen scheint als mit anderen und daß weiche Stoffe i. A. höhere Reibungswerte haben als harte.

Die Konstante R_0 gibt die Reibungskraft bei fehlender Normalkraft ($P = 0$) an. In den meisten Fällen waren die Werte R_0 nur durch Extrapolation aus dem Verlauf der Annäherungsgraden als kleiner Betrag (um 0,1 kg) zu errechnen. In einzelnen Fällen

Zahlentafel 5. Reibungsbeiwerte.

	Flußeisen	Gußeisen	Messing	Weißmetall	Weißbuche
Flußeisen	—	0,22 (0,22)	—	0,31 (0,305)	0,61
Gußeisen	0,22 (0,22)	0,22 ?	0,19 (0,19)	0,29 (0,29)	0,58 ?
Messing	—	0,19 (0,19)	—	0,30 (0,30)	0,53
Weißmetall	0,31 (0,305)	0,29 (0,29)	0,30 (0,30)	—	0,53
Weißbuche	0,61	0,58 ?	0,53	0,53	0,475

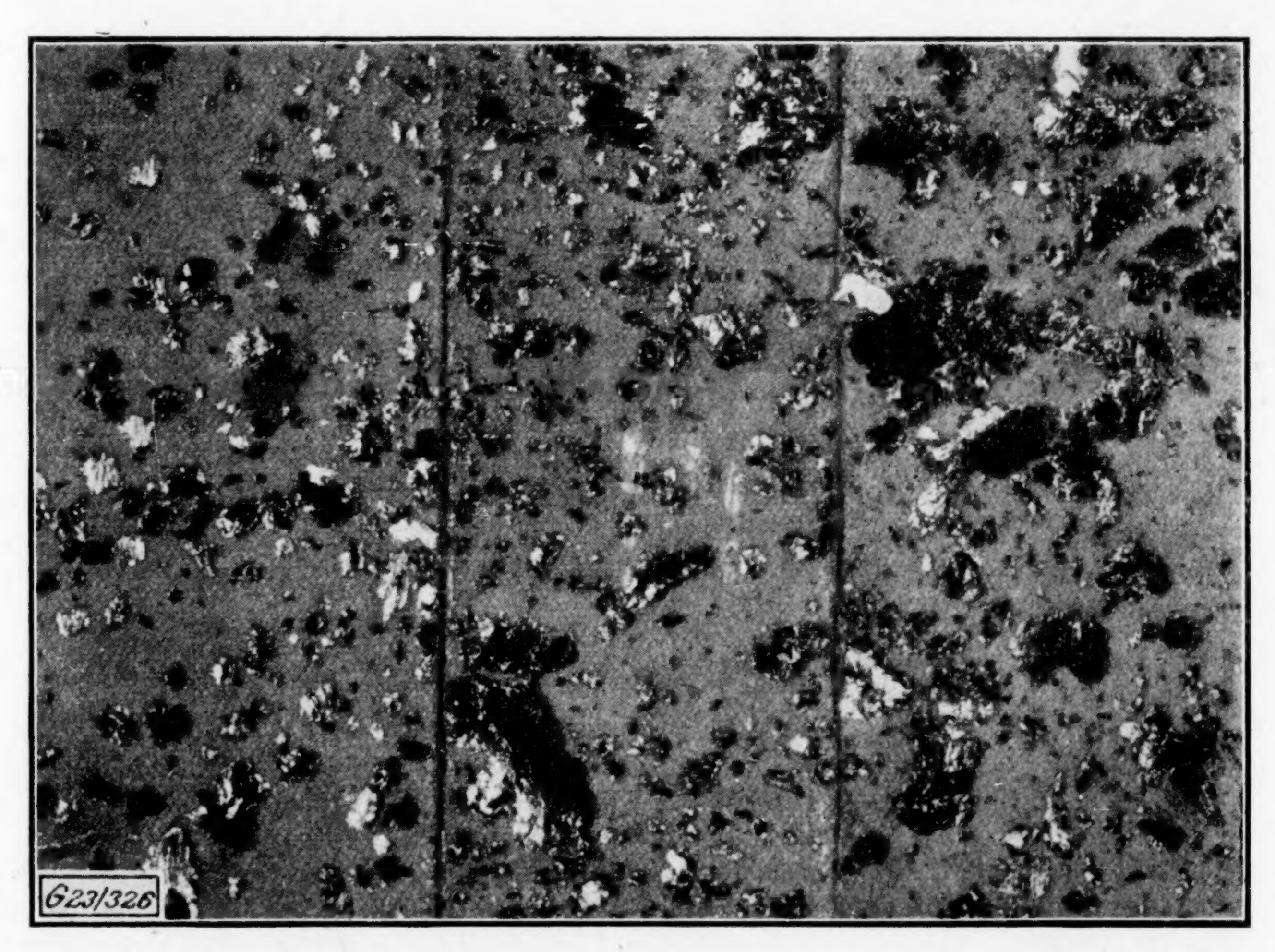
[2]) Leder mit Holz und Metallen ist nicht aufgenommen, da ein annähernder Beharrungszustand nicht erreicht wurde.

jedoch mußte trotz der unregelmäßigen, zuweilen deutlich unterbrochenen Berührung beider Scheiben eine erhebliche Umfangskraft aufgewendet werden, um die angetriebene Scheibe zum Stillstand zu bringen, wenn sie vorher ohne Normalkraft vorsichtig an die treibende Scheibe gebracht und von dieser in ihrer Bewegung mitgenommen worden war. Wie Zahlentafel 2, S. 8 (Abb. 11, S. 10) zeigt wurde in einem Falle R_0 bei Messing mit Gußeisen zu 0,61 kg! beobachtet, wobei die starken Unterschiede gegenüber anderen Versuchen beim selben Stoffpaar auffallen, die wieder auf die Beschaffenheit der Oberfläche (Rauhigkeit) als Ursache hinweisen. Dafür spricht auch der Umstand, daß erhebliche Werte R_0 nur dort beobachtet bezw. aus dem Verlauf der Geraden anzunehmen sind, wo auch das Auge die Oberfläche als «rauh» anspricht. Also besonders beim spanbildenden Messing mit Flußeisen und Gußeisen; weiterhin auch, daß R_0 bei breiterer Berührungsfläche größer zu sein scheint, z. B. bei Weißmetall mit Gußeisen:

bei einer Laufbreite von $> 2{,}5$ mm $R = \sim 0{,}11 + 0{,}29\,P$,
bei einer Laufbreite von $1{,}0$ mm $R = \sim 0{,}03 + 0{,}29\,P$.

Dagegen ist zwischen der Größe von R_0 und den übrigen Reibungswerten (μ_∞) kein Zusammenhang zu erkennen; z. B. sind dort, wo R_0 klein ist, besonders große Reibungswerte festgestellt (Weißmetall und Holz mit Metallen).

6. Theoretische Bemerkungen. Infolge von Rauhigkeit der Oberflächen ist also das Auftreten einer Reibungskraft R_0 vorstellbar, da dann bei rein tangentialer Verschiebung der beiden Scheiben gegeneinander auch bei Abwesenheit von Normalkräften an der Berührungsstelle einige vorspringende Materialteilchen abgerissen werden müßten. Eine Zunahme der Reibungskraft mit der Normalkraft könnte dann z. T. in der Vergrößerung der Berührungsfläche eine Erklärung finden, wodurch z. B. beim Abbrechen von Rauhigkeiten deren Zahl zunehmen müßte. Zur völligen Erklärung des Anwachsens der Reibungskraft mit der Normalkraft reicht diese Annahme jedoch keineswegs aus, da sie z. B. bei ebenen Berührungsflächen versagt. Verfasser sieht einen wesentlicheren Grund in einer mit der Normalkraft wachsenden Tiefenwirkung, derart, daß die von der Reibungskraft abgegebene Arbeit ein von ihrer Größe abhängiges Stoffvolumen weitgehend deformiert. So lassen z. B. Abb. 16 bis 18 bei Messing mit Flußeisen erkennen, daß bei zunehmender Normalkraft die Größe (auch die Zahl!) der Späne wuchs. Entsprechend



Vergrößerung 5,3 fach.

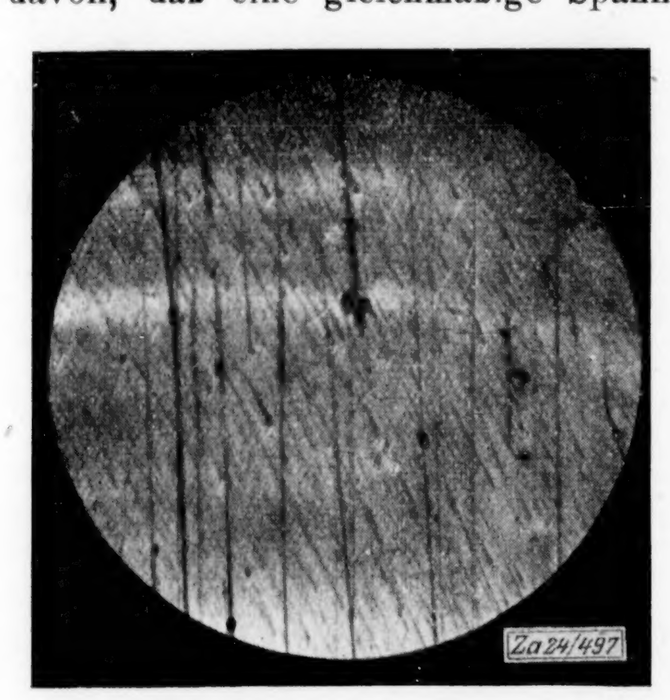
Normalkraft $P = 2{,}7$ kg, $P = 6{,}7$ kg, $P = 26{,}7$ kg.

Abb. 16 bis 18
Messingspäne von den Reibungsversuchen Messing — Flußeisen.

kann in einem Aufsatz »Die Untersuchung der Dreharbeit«[1]) bei einigen Abbildungen, die die Deformation der Spanoberfläche beim Drehen wiedergeben, die zunehmende Tiefenwirkung mit wachsendem Spanquerschnitt beim Drehen (Normalkräfte annähernd proportional dem Querschnitt) beobachtet werden. Wie erheblich die Tiefenwirkung bei einer Schiene ist, zeigt die metallographische Aufnahme einer Schiene[2]) in einem Aufsatz «Ueber Schienenstahl»; zu bemerken ist, daß durch Härteprüfung eine wesentlich tiefergehende ($\sim$ 6 mm) Deformation festgestellt wurde, als die Abbildung zeigt ($\sim$ $^1/_2$ mm).

Diese Betrachtungen setzten voraus, daß an den Oberflächen der zur Berührung gelangenden Stoffe Veränderungen, d. h. beginnende Abnutzung, zu erkennen war, wobei sich bei vielen Stoffen, wie die Erfahrung lehrt, schließlich ein gewisser Beharrungszustand einstellte. Welche Rolle hierbei durch den Reibungsvorgang entstehende Stoffe spielen, ist im Einzelnen nicht zu übersehen; vielleicht verzögern oder verhindern sie u. a. eine mit Spanabfall verbundene Zerstörung der Oberflächen. Die Wirkung von Einflüssen, wie molekularen Vorgängen zwischen Stoffteilchen oder in der Oberfläche suspendierten Flüssigkeiten oder Gase, scheint dann im Wesentlichen zurückzutreten, worauf auch das im nächsten Abschnitt beschriebene Verhalten der Schlupfe hinweist. Deren Untersuchung zeigte ein abweichendes Verhalten der Metalle in poliertem Zustand, obwohl die ursprüngliche Politur durch die verhältnismäßig hohen Beanspruchungen schnell dahin war.

Es fragt sich weiter, ob die bei den Versuchen des Verfassers angewendeten hohen Anpressungsdrucke[3]) und die von Körpern mit ebenen Berührungsflächen abweichende Art der Berührung und damit der Spannungsverhältnisse grundlegende Unterschiede in den Gesetzen der Reibung bedingen können, so daß eine Uebertragung der hier gefundenen Ergebnisse auf Körper mit ebenen Berührungsflächen unmöglich wird. Jedoch abgesehen davon, daß eine gleichmäßige Spannungsverteilung selbst theoretisch unvorstellbar ist, zeigen sich in der Praxis auch bei angeblich ebenen Körpern und sehr kleinen Anpressungsdrucken[4]) Abnutzungserscheinungen, wie sie z. B. in Abb. 19 bei Messing nach kurzem Gleiten auf Flußeisen im Bilde ($v = 35$) festgehalten sind. Jedenfalls stehen die Ergebnisse dieses Abschnittes in keinem Falle im Widerspruch mit bisher bekannten Erscheinungen bei ebenen oder gleichgekrümmten Berührungsflächen. Dagegen bestätigen die Versuche von Messing mit Flußeisen die von Rennie[5]) beobachtete Zunahme des Reibungsbeiwertes mit zunehmendem Anpressungsdruck bei fortschreitender Abnutzung und die Versuche von Leder mit Metallen die Versuche von Rudeloff[6]) u. a. über die Abnahme des Reibungsbeiwertes mit zunehmendem Anpressungsdruck. Jedoch stehen der Uebertragung der hier gefundenen Ergebnisse auf Körper mit ebenen Berührungsflächen noch erhebliche Schwierigkeiten im Wege, da vorläufig weder die Verteilung des Anpressungsdruckes noch des Reibungsdruckes über beliebig gestaltete Berührungsflächen bekannt ist, besonders wenn wie hier mit der Mitwirkung von Oberflächenrauhigkeiten gerechnet werden muß.



Vergrößerung 35 fach.

Abb. 19 Messingoberfläche nach einem Gleitversuch von wenigen Sekunden auf Flußeisen.

B) Das Verhalten der Schlupfe.

7. Einfluß von Normalkraft, Roll- und Lagerreibung. Wie schon erwähnt, bleibt die getriebene Scheibe eines Reibungstriebs — besonders unter dem Einfluß einer an der Berührungsstelle zu übertragenden Umfangskraft — hinter der treibenden um ein

[1]) H. Klopstock, Ber. d. Versuchsfeldes f. Werkzeugm., H. 8, Berlin. (Erscheint in Kürze.)

[2]) Stahl u. Eisen, Bd. 30, 1910, S. 1594; vgl. St. u. E., Bd. 39, S. 10: Gefüge von Schienen.

[3]) Z. B. bei Messing mit Flußeisen und $P = 25$ kg, Scheibenbreite $b = 2{,}5$ mm: mittlerer Anpressungsdruck $p \sim 1250$ kg/cm^2.

[4]) Sogar bei Jacob! A. a. O., S. 47,

[5]) Gümbel, Wer ist der wirklich Blinde? Berlin 1920, S. 35.

[6]) Mitt. d. Mat.-Prüf.-Amt 1920, S. 262; Maschinenbau, Bd. 2, 1922, S. 80, Stiel, a. a. O., S. 19, 58.

gewisses Maß zurück, das in unserem Falle für eine Umdrehung der treibenden Scheibe mit Schlupf bezeichnet wird. Umfangskräfte völlig auszuschalten, war unmöglich, da wie die Versuche zeigten, die Reibung in den Lagern der getriebenen Scheibe und die sog. Rollreibung eine bei kleineren Normalkräften (< 6,67 kg) zu berücksichtigende Umfangskraft bedingen. Bei höheren Normalkräften verschwand ihr Einfluß völlig; dafür trat der Einfluß elastischer Deformationen der beiden Scheiben in Erscheinung, die nach Gümbel[1]) Schlupfe beiderlei Vorzeichens hervorrufen können. Eine eingehende Untersuchung[2]) zeigte, daß diese Schlupfe i. A. gegenüber den durch Umfangskräfte hervorgerufenen vernachlässigbar klein waren. Im übrigen wurden sie nach S. 5 durch Messung des Schlupfes für die Umfangskraft $R = 0$[3]) und Abzug vom Bruttoschlupf berücksichtigt, wodurch ebenfalls der Aenderung der Scheibenradien infolge Abnutzung Rechnung getragen wurde. Die Lagerreibung (Kugellager) wurde derart berücksichtigt, daß sie im Leerlauf gemessen und der Umfangskraft zugeschlagen, also als konstant angenommen wurde[4]). Die Rollreibung wurde vernachlässigt; die Werte, die die Hütte dafür angibt (0,03 bis 0,05 P) sind für nennenswerte Normalkräfte viel zu hoch.

8. Schlupfe und Gleitgeschwindigkeit. Betrachten wir Abb. 1 und 2 auf S. 2, so erscheint eine Aehnlichkeit der beiden Kurven unverkennbar, von denen die eine nach Jahn die Abhängigkeit des Schlupfes g von der Umfangskraft R für Stahl auf Stahl, die andere nach Jacob die Abhängigkeit der Gleitgeschwindigkeit v von der Reibungszahl μ (bezw. der Reibungskraft R_{max}) für Messing auf Messing wiedergibt. Könnte man die beiden Kurven ihrem Wesen nach als gleichartig, die Umfangskraft R also allgemein als Reibungskraft ansehen, die ein Gleiten der beiden Scheiben an ihrer Berührungsfläche mit der Relativgeschwindigkeit:

$$v = \frac{g_n \cdot n}{60}, \quad (n = \text{Drehzahl}) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

hervorruft, und ist die Abhängigkeit der Gleitgeschwindigkeit von der Reibungszahl bekannt, so berechnet sich der Schlupf für eine beliebige Umfangskraft folgendermaßen: Abb. 20 gibt z. B. den vom Verfasser festgestellten Zusammenhang zwischen Reibungskraft und Gleitgeschwindigkeit bei Leder mit Gußeisen wieder. Hierzu wurden z. T. Versuche derart ausgeführt, daß bei ruhender treibender Scheibe die getriebene durch unmittelbar wirkende Umfangskraft eine bestimmte Drehgeschwindigkeit erhielt (Vers. 293: bis $v = 200$ cm/sk)), z. T. derart, daß die treibende sich mit einer bestimmten Drehzahl drehte, während die getriebene durch eine Reibungskraft gerade zum Stillstehen abgebremst wurde (Vers. 294). Beide Reihen fügen sich, wie man aus Abb. 20 erkennt, gut aneinander an.

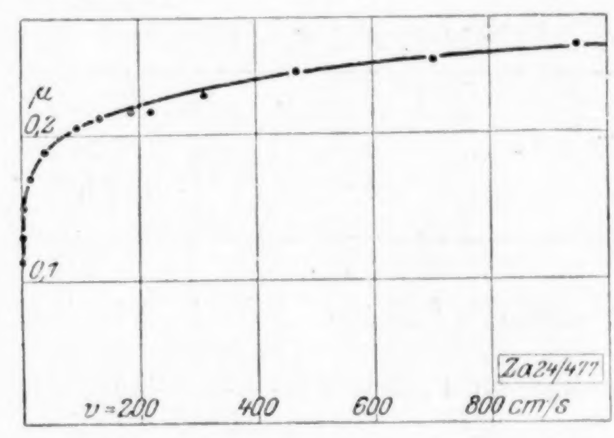


Abb. 20
Abhängigkeit des Reibungsbeiwertes von der Gleitgeschwindigkeit bei Leder — Gußeisen. (Vers. 293/94.)

Für die maximal übertragbare Umfangskraft R_{max} bei einer beliebigen Drehzahl n ist $g_{max} = 2\pi r$ und nach (1)

$$v_{max} = \frac{2\pi r \cdot n}{60} = \sim \frac{950}{60} \cdot n \cdot (\text{mm/sk}).$$

Für $n = 35$, $v_{max} \sim 550$ mm/sec. entnehmen wir Abb. 20 ein dazugehöriges $\mu_{max} = 0{,}223$. Für ein beliebiges R, z. B. $R = 0{,}8\, R_{max}$ wäre dann, da laut Voraussetzung $\frac{R}{R_{max}} = \frac{\mu}{\mu_{max}}$ $\quad \mu = 0{,}8\, \mu_{max} \sim 0{,}223 \cdot 0{,}8 = \sim 0{,}178$

die dazugehörige Gleitgeschwindigkeit der Abb. 20 entnommen $v \sim 20$ mm/sk,

$$\text{und der Schlupf } g_{35} = \frac{60 \cdot v}{n} = \sim 34 \text{ mm}.$$

Eine derart aus Vers. 293/94 berechnete Kurve der mit Gleitschlupfe zu bezeichnenden Schlupfe ist in Abb. 21 für Leder mit Gußeisen mit einer unmittelbar aufgenommenen zusammengestellt (Vers. 299). Man erkennt, daß die gemessenen Schlupfe in einiger Entfernung von R_{max} größer als die berechneten sind, und zwar verhältnismäßig

[1]) Gümbel, a. a. O., S. 44, 59.
[2]) Von Herrn Dipl.-Ing. Fromm. Die Ergebnisse werden in Kürze in dieser Zeitschrift veröffentlicht.
[3]) Gemessen wurde für die Umfangskraft R = Lagerreibungskraft usw., s. o.
[4]) Vergl. Stribeck, Forschungsarb. d. V. d. I., H. 7, S. 37.

um so größer, je kleiner die Umfangskraft war. In der Nähe des Nullpunktes ist ein Gleiten überhaupt nicht beobachtet worden, so daß die berechnete Kurve erst in gewisser Höhe (Reibungswert der Ruhe) beginnt, während die aufgenommene Schlupfkurve einen fast geradlinigen Anstieg vom Nullpunkt aus und z. B. bei $\frac{R_{max}}{20}$ einen Schlupf von rd. 4 mm, bei $\frac{R_{max}}{40}$ von rd. 2 mm zeigt.

Die allgemeine Form der Gleichung (1) bedeutet auch, daß Gleitschlupfe mit zunehmender Drehzahl hyperbolisch abnehmen müssen:

$$g_n \cdot n = 60\, v = \text{konst.}$$

Ein weiterer »Gleitschlupf« könnte nach der alten Anschauung an der Grenze der übertragbaren Umfangskraft infolge ungleicher Glätte der Scheibenoberflächen auftreten, auch wenn man annimmt, daß vor der Erreichung des Grenzwertes der Reibung ein Gleiten nicht stattfindet. An den glatteren Stellen könnte das Rollen schon aussetzen und Gleiten stattfinden; die rauhen Stellen würden die angetriebene Scheibe jedoch immer noch mitnehmen und sie instandsetzen, infolge ihrer Trägheit die glatteren bis zu einem gewissen Wert der Umfangskraft hinauf zu überwinden. Unter der vereinfachenden Annahme, daß die Reibungszahl von der Gleitgeschwindigkeit unabhängig ist, ergibt die Rechnung, daß auch dieser Schlupf mit zunehmender Drehzahl abnehmen müßte, wobei er erst bei der der glattesten Stelle entsprechenden Reibungskraft einsetzen würde.

In der Tat konnte eine Abnahme der Schlupfe mit wachsender Drehzahl bei einigen Stoffpaaren beobachtet werden, und zwar bei Holz und Leder mit Metallen und Holz, sowie bei Messing mit Flußeisen vor der völligen Zerstörung der Oberflächenpolitur, schließlich bei den meisten Stoffen in den allerersten Versuchen (bei Gußeisen mit Gußeisen in einem Falle bis zum 50-ten Versuch[1])), z. B.:

Zahlentafel 6. **Einfluß der Drehzahl bei hohen Umfangskräften.**

	Versuch	P kg	R/P	g/mm $w = 10$	20	25	30	40	50	60
Gußeisen mit Gußeisen . .	23	6,67	0,241			81 65		30 32	34 29	23 28
Messing mit Flußeisen . .	223	2,67	0,292	96? 106?		77 84		54 50?	42 36	34 34
Holz mit Holz	149	6,67	0,492				250 265?	213 210	200 190	173 170
Leder mit Gußeisen . . .	304	6,67	0,057		93 77		66 56	51 45	43 41	38

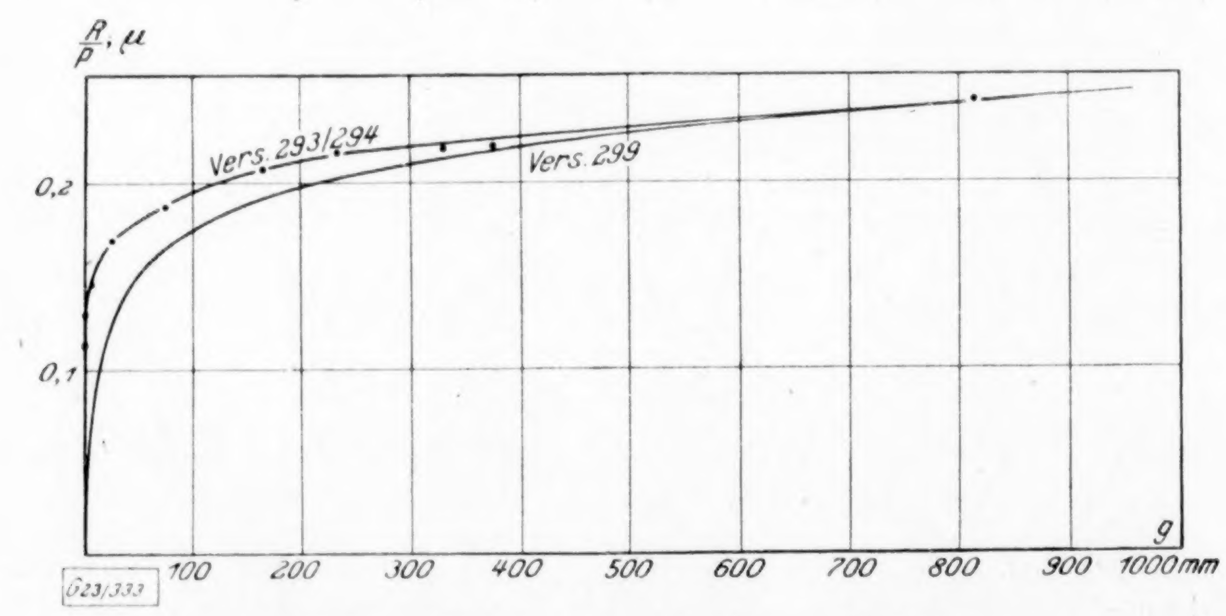


Abb. 21 Schlupfkurven von Leder mit Gußeisen.
Vergleich einer unmittelbar aufgenommenen (Vers. 299), mit einer berechneten (Vers. 293/94).

[1]) Später verhielt sich Gußeisen mit Gußeisen anders: die Schlupfe blieben annähernd konstant. Eine Abnahme wurde wieder beobachtet, als die Scheiben geölt und mit einem trockenen Wattebausch abgewischt worden waren. Gut geölte und gefettete Scheiben verhielten sich ganz anders, da bei ihnen die Schlupfe mit zunehmender Drehzahl größer wurden (Stribeck, a. a. O.).

9. Einfluß der Drehzahl-Resonanzstörung. Dieses Verhalten war jedoch, wie Zahlentafel 7 zeigt, in ausgesprochenem Maße nur in nächster Nähe des Reibungswertes zu erkennen. War die Umfangskraft erheblich kleiner, so läßt Zahlentafel 7 zwei neue Erscheinungen erkennen. Bei hohen Normalkräften (Vers. 316/319) näherten sich die Schlupfe einem von der Drehzahl unabhängigen Wert, und zwar um so besser, je

Zahlentafel 7. Einfluß der Drehgeschwindigkeit bei Leder mit Gußeisen.

Versuch	P	$n = 35$ 1/min		$n = 60$ 1/min		Versuch	P	$n = 35$ 1/min		$n = 60$ 1/min	
Nr.	kg	R/P	g mm	R/P	g mm	Nr.	kg	R/P	g mm	R/P	g mm
289/290	2,67	0,004	0,6	0,004	0,7	291/292	2,67	0,049	4,9	0,049	5,4
		0,023	2,2	0,023	2,4			0,030	2,9	0,030	3,6
		0,041	3,7	0,041	4,5			0,011	1,0	0,011	1,2
		0,060	5,6	0,060	6,2			0,004	0,3	0,004	0,2
		0,079	8,6	0,079	9,5						
		0,098	11,6	0,098	11,9	316/318	53,33	0,033	2,0	0,035	2,4
		0,116	16,7	0,116	16,2			0,067	5,7	0,072	5,5
		0,135	24,6	0,136	22,0			0,106	15,9	0,110	15,0
		0,154	38,5	0,154	30,4			0,126	32,3	0,128	28,4
		0,173	~ 71	0,173	49,0			0,140	57,7	0,143	39,0
		0,191	~135	0,191	86,6			0,157	77,5	0,158	68,4
		0,210	~255	0,210	~167			0,171	~133	0,172	~120
		0,229	~750	0,229	~328			0,183	~227	0,183	~144
		0,248	setzt aus	0,248	~670			0,189	~260	0,194	~240
		—	—	0,261	setzt aus			~0,21	setzt aus	~0,20	setzt aus
291/292		—	—	0,233	~565	317/319		0,197	setzt aus	—	—
		0,214	~297	0,214	~215			0,187	~320	0,189	~200
		0,195	~163	0,195	~108			0,176	~176	0,178	~132
		0,176	~ 77	0,176	58,8			0,165	~133,6	0,167	~ 89
		0,158	44,0	0,161	37,6			0,150	81,8	0,152	58,8
		0,139	28,4	0,143	25,2			0,136	55,7	0,137	40,3
		0,120	19,3	0,124	17,9			0,119	27,1	0,121	25,3
		0,103	14,3	0,103	13,7			0,092	12,4	0,092	10,7
		0,086	10,0	0,086	10,5			0,055	5,0	0,055	4,8
		0,068	7,2	0,068	7,6			0,019	1,5	0,019	1,3

kleiner die Umfangskraft war; bei kleineren Normalkräften (Vers. 289/292) sind die Schlupfe bei der höheren Drehzahl größer als bei der niederen, so daß sich dann die Schlupfkurven überschnitten.

Die übrigen Stoffpaare zeigten nur darin einen Unterschied, daß bei höheren Normalkräften die Schlupfe auch bei Umfangtkräften in der Nähe der Reibungskraft bei allen Drehzahlen annähernd gleich blieben. Zahlentafel 8 zeigt z. B. bei Weißmetall mit Flußeisen in den Schlupfen bei verschiedenen Drehzahlen eine größte Abweichung von ± 0,04 mm = ± 1,5 vH bei einer größten aufgebrachten Umfangskraft von rd. 0,9 R_{max}.

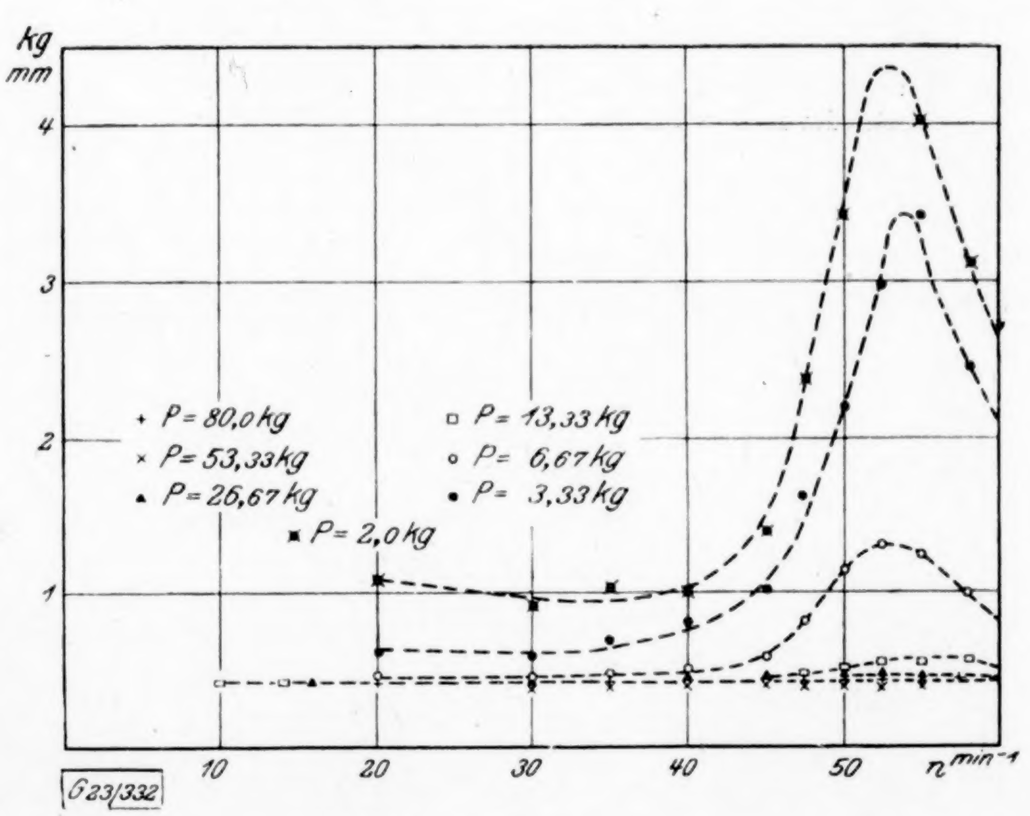


Abb. 22 Resonanzstörung.

Mittlere Größe der Schlupfe bei verschiedenen Drehzahlen und Normalkräften ($R/P = 0,09$). Weißmetall mit Flußeisen.

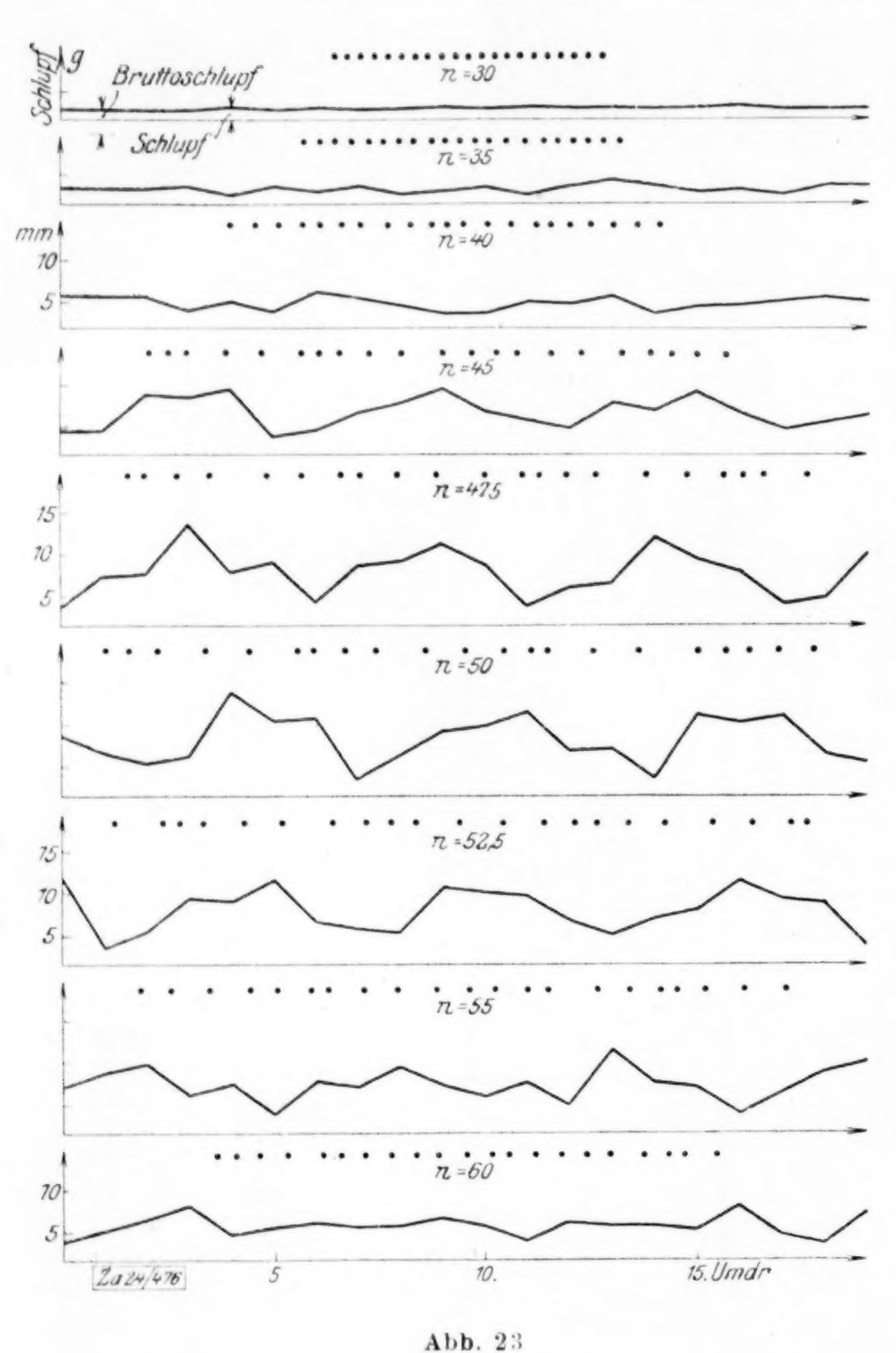


Abb. 23

Periodische Aenderung der Schlupfgröße bei verschiedenen Drehzahlen n (Flußeisen mit Flußeisen).

Abb. 22 deckt schließlich die Ursache davon auf, daß kleinere Schlupfe bei kleineren Normalkräften und einer Drehzahl von 60 min^{-1} größer sind als bei 35 min^{-1} (Zahlentafel 7). Bei 45 bis 50 min^{-1} wurde nämlich in der mittleren Größe der Schlupfe ein auf Resonanzstörung zurückzuführendes Maximum (ein zweites, kleineres bei rund 20 min^{-1}) und bei 30 bis 35 min^{-1} ein Minimum festgestellt. Mit zunehmender Normalkraft nahm das Maximum ab und von $P = 26{,}67$ kg ab waren die Schlupfe bei Weißmetall mit Flußeisen (Abb. 22) bei verschiedenen Drehzahlen fast konstant (vergl. Zahlentafel 8). Wählte man außerdem das Verhältnis $\frac{\text{Umfangskraft}}{\text{Normalkraft}}$ für alle Normalkräfte gleich, so waren die Schlupfe bei verschiedenen Normalkräften (über 26,67 kg) annähernd gleich und etwa ebenso groß, wie die Minimalschlupfe bei den nächst kleineren Normalkräften 13,33 und 6,67 kg. Bei ganz kleinen Normalkräften ($< 6{,}67$ kg) waren die Schlupfe durchweg groß, die Maxima bedeutend.

Die in Abb. 22 aufgezeichneten Schlupfe sind Mittelwerte über eine größere Zahl von Umdrehungen. Trägt man nun die Abstände der Diagrammpunkte, die die Größe des Bruttoschlupfes angeben, in einem beliebigen Maßstabe als Ordinaten, die lau-

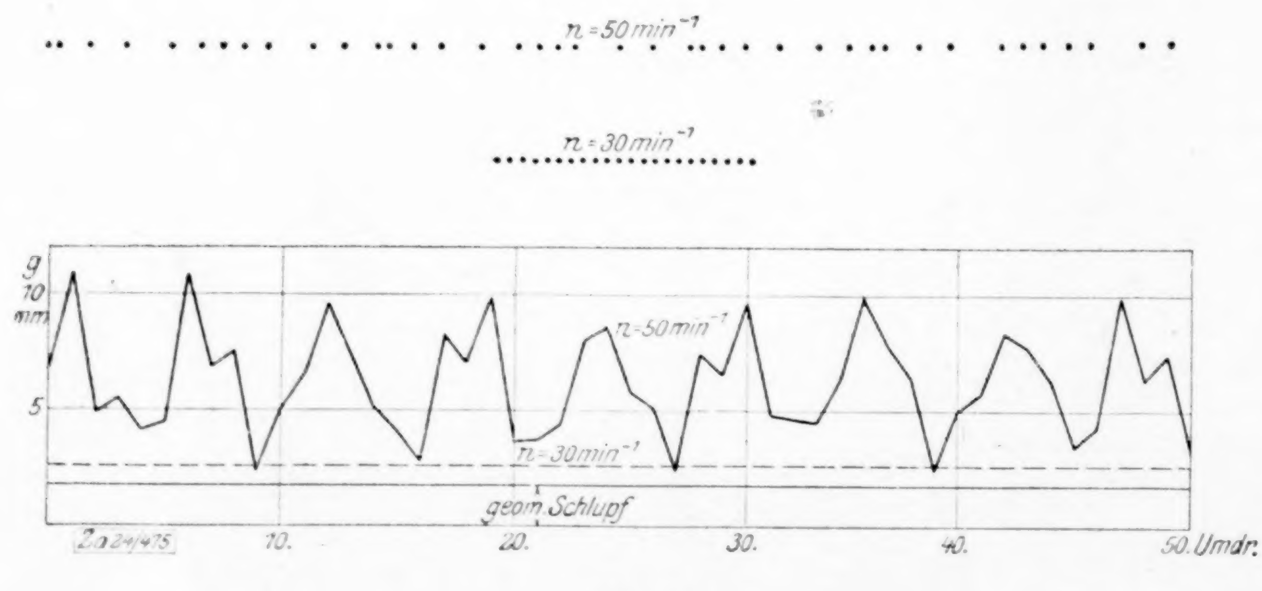


Abb. 24

Periodische Aenderung der Schlupfgröße bei 50 Uml./min (Messing mit Flußeisen).

Zahlentafel 8. Einfluß der Drehgeschwindigkeit auf die Schlupfe bei Weißmetall mit Flußeisen.

Versuch Nr.	P kg	$n \sim 15$ 1/min		$n = 30$ 1/min		$n = 45$ 1/min		$n = 60$ 1/min	
		R/P	g mm	R/P	g mm	R/P	g mm	R/P	g mm
395	26,67	0,000	0,00	0,000	0,00	0,000	– 0,01	0,000	0,00
396		0,110	0,55	0,110	0,53	0,110	0,54	0,110	0,54
397		0,216	1,13	0,219	1,12	0,219	1,12	0,219	1,13
398		0,291	1,62	0,292	1,62	0,292	1,64	0,292	1,65
399		0,328	1,94	0,329	1,92	0,329	1,97	0,329	2,00
400				0,000	0,00			0,000	0,00

fende Nummer der Umdrehung vom Zeitbeginn der Messung ab als Abszisse in ein Koordinatensystem ein, so entstehen Linienzüge, wie sie Abb. 23 für Flußeisen mit Flußeisen und Abb. 24 für Messing mit Flußeisen wiedergibt. Bei Drehzahlen in der Nähe der Minima von Abb. 22 ($n = 30$ bis 35 min^{-1}) waren die einzelnen Schlupfe annähernd gleich, in der Nähe der Maxima ($n = 45$ bis 50 min^{-1}) schwankten sie dagegen stark von Umdrehung zu Umdrehung, und zwar periodisch. Abb. 22 läßt eine Periode von 5,8 Umdrehungen erkennen; sie blieb bei allen Stoffen und Drehzahlen gleich (vergl. Abb. 21) und war offenbar auf Riemenresonanz zurückzuführen, da die Riemenlänge gleich dem 5,80fachen des Umfanges der Riemenscheibe gemessen wurde. Die Resonanzfrequenz berechnet sich hieraus zu $\sim \frac{50}{5,8} = \sim 9$ min^{-1}, ist also sehr niedrig und wesentlich kleiner, als die Eigenschwingungszahlen des Riemens. Durch Entfernen des Riemenschlosses und Leimen des Riemens sowie durch Anbringen einer — wegen der ungünstigen Raumverhältnisse ungenügenden — Schwungmasse ließ sich die Störung nicht beseitigen. Auf einen völligen Umbau der Versuchseinrichtung wurde jedoch verzichtet, da aus den soeben geschilderten Versuchen hervorgeht, daß der Einfluß der Resonanzstörung einerseits bei Drehzahlen um $n = 30$ bis 35 min^{-1}, andererseits bei höheren Normalkräften gering war.

Die Größe der Maxima (Abb. 22) war außer von der Normalkraft noch von der Beschaffenheit der Oberflächen und der Größe der Umfangskraft abhängig, und um so kleiner, je abgenutzter (rauher) die Oberfläche war. Mit Abnahme der Umfangskraft nahmen auch die Maxima ab; andererseits waren sie bei sehr hohen Umfangskräften infolge des Auftretens großer Schlupfe und starker Streuung verwischt und traten daher in Gegend der stärksten Krümmung der Schlupfkurven am deutlichsten in Erscheinung. Soweit untersucht worden ist, verhielten sich alle Stoffe bezüglich der Lage der Minima und Maxima so, wie es Abb. 22 für Weißmetall und Flußeisen wiedergibt. Ihre Absolutwerte waren schließlich noch von den Stoffen der Scheiben abhängig. Bei Messing, Gußeisen und Flußeisen miteinander waren die Unterschiede in den Schlupfen bei verschiedenen Drehzahlen und unter sonst gleichen Verhältnissen größer als bei Weißmetall, Holz und Leder, auch in Verbindung mit den erstgenannten Stoffen und bei letzteren bei höheren Normalkräften nicht mehr festzustellen (s. Zahlentafel 8).

Die sich in starkem Schwanken der Schlupfe kennzeichnende ungleichmäßige Bewegung der treibenden Scheibe in der Nähe der Drehzahl $n = 50$ min^{-1} hatte zur Folge, daß sich bei Verwendung von Metallscheiben auf deren Oberflächen gleichmäßige Riffeln von $\sim 1,9$ mm Abstand bildeten.

Die Vergrößerung der Schlupfe und Bildung von Riffeln durch Resonanzstörung läßt sich ohne Eingehen auf die Ursache leicht an Abb. 25 veranschaulichen. Die Resonanzstörung hat wegen der Trägheit der getriebenen Scheibe periodisch eine Aenderung der zu übertragenden Umfangskraft R

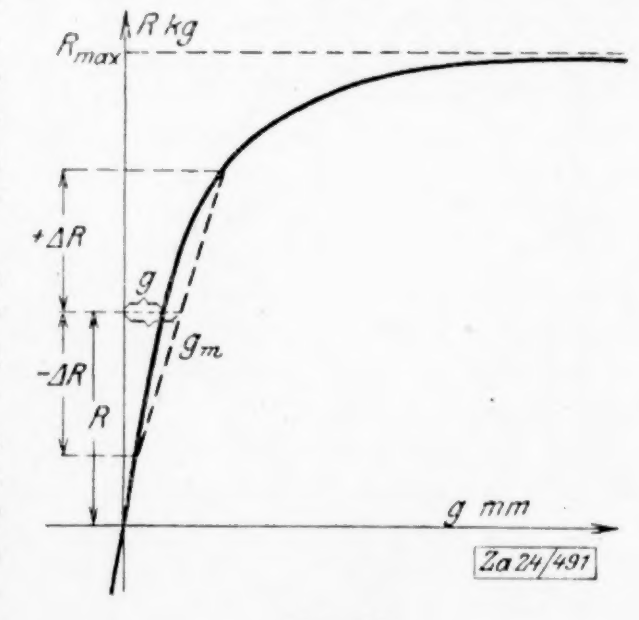
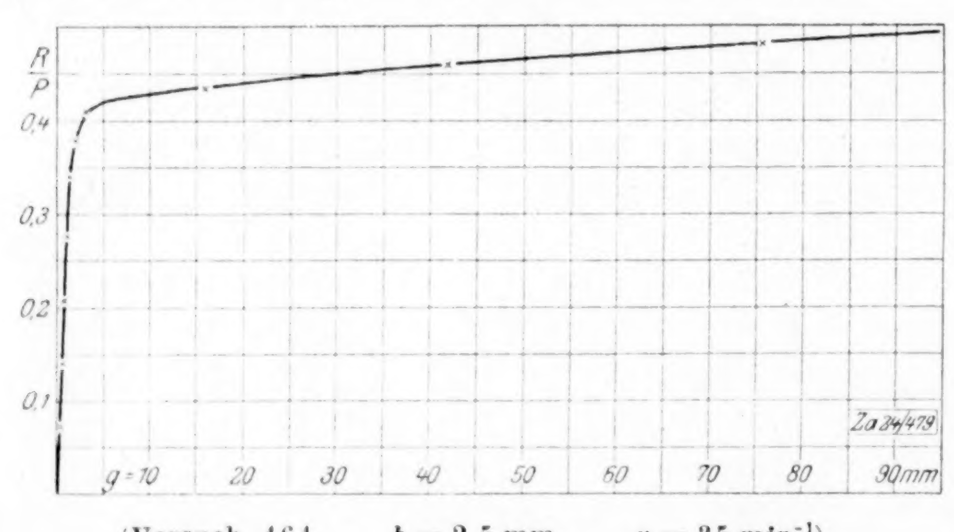


Abb. 25
Vergrößerung der Schlupfe infolge Resonanz

zur Folge. Da der Schlupf mit der Umfangskraft in allen untersuchten Fällen etwa nach Abb. 25 zusammenhängt, ist die Summe der Schlupfe $2\,g_m$ bei den Umfangskräften $R + \Delta R$ und $R - \Delta R$ stets größer als der doppelte Schlupf $= 2\,g$ bei der Umfangskraft R. Daher muß der gemessenene Schlupf bei symmetrischer Resonanz stets größer als bei ruhigem Gang sein, und zwar um so stärker, je größer ΔR absolut und im Verhältnis zu R_{max} werden kann, also bei kleinen Normalkräften. Dadurch erklärt sich auch zwanglos die Beobachtung, daß die Resonanzstörung in der Nähe der stärksten Krümmung der Schlupfkurve den verhältnismäßig größten Einfluß hatte. Infolge der Resonanzstörung kann also auch leicht die Reibungskraft periodisch überschritten werden. Auf die dadurch hervorgerufene, ungleichmäßige Abnutzung oder Verschiebung von Materialteilchen war offenbar die Enstehung von Riffeln zurückzuführen [1]).

10. Verhalten der Schlupfe bei Flußeisen und Gußeisen. In diesem und dem folgenden Abschnitt soll auf den Verlauf der Schlupfe bei den verschiedenen Stoffen eingegangen werden. Wie schon erwähnt, stellte sich ein gleichmäßiges Verhalten bei vielen Stoffpaaren erst nach einer Reihe von Versuchen, bei einigen überhaupt nicht ein. Zu Beginn neigten Reibungswerte und Schlupfe zu sprunghaften Änderungen, dann näherten sie sich allmählich gleichbleibenden Werten, wobei die Schlupfe i. A. erheblich abnahmen. Auch waren die später deutlich zu Tage tretenden Unterschiede in den Kurven der verschiedenen Stoffpaare zunächst verwischt. Um diese Unterschiede zu erkennen, war es demnach meist notwendig, eine Anzahl Versuche abzuwarten. Mit Rücksicht auf die Resonanzstörung sind die im folgenden wiedergegebenen Schlupfkurven meist bei einer Drehzahl von $n = 35\ \text{min}^{-1}$ angenommen worden. Die Normalkraft ist vielfach zu 6,67 kg, also möglichst niedrig gewählt worden, um die bei höheren Normalkräften infolge erheblicher Abnutzung der Oberflächen und starker Beanspruchung der Versuchseinrichtung auftretenden Unregelmäßigkeiten zu vermeiden.



(Versuch 464, $b = 2{,}5$ mm, $n = 35\ \text{min}^{-1}$).

Abb. 26 Schlupfkurve von Flußeisen mit Flußeisen.

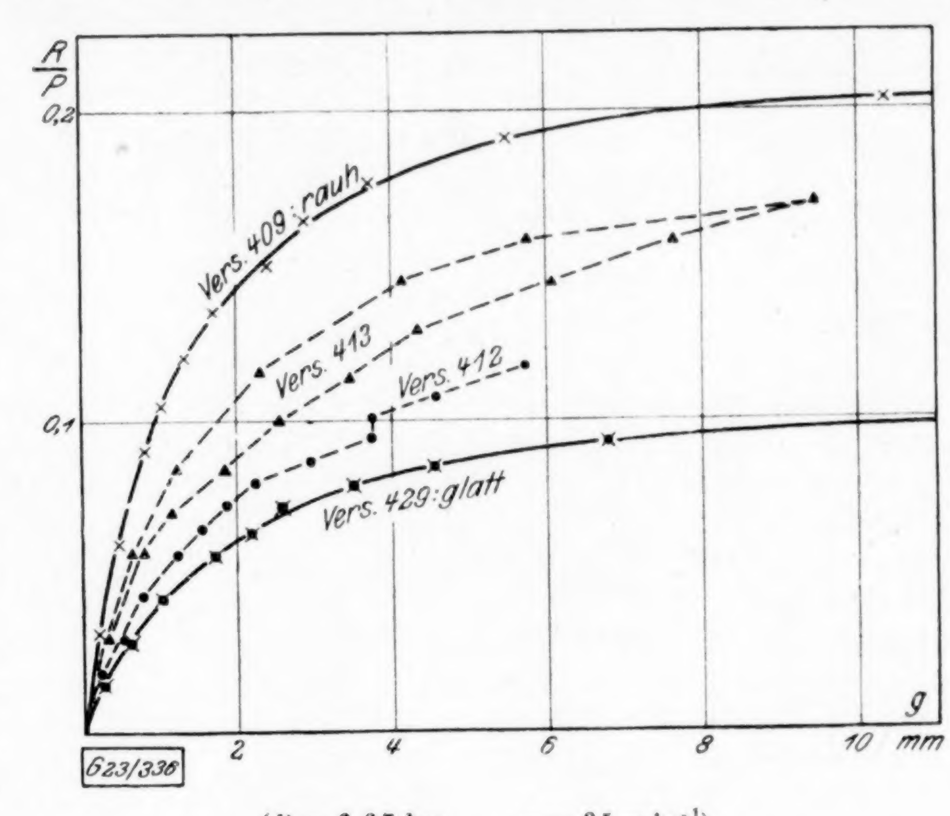
Flußeisen — Flußeisen. Abb. 26 gibt eine aufgenommene Schlupfkurve wieder. Eine Wiederholung war unmöglich, da der Reibungswert (s. S. 7) mit Zerstörung der Oberfläche dauernd stieg, die Schlupfe bei gleichbleibender Umfangskraft ständig kleiner wurden. Zu bemerken ist noch, daß die Scheiben vor Aufnahme der Kurve in Abb. 24 längere Zeit mit hoher Normalkraft und ohne Umfangskraft liefen, wodurch die Lauffläche matt geworden, also offenbar geflossen war.

Gußeisen — Gußeisen und Gußeisen — Flußeisen. Diese Stoffe verhielten sich weitgehend ähnlich und boten der Untersuchung erhebliche Schwierigkeiten. Bei den ersten aufgenommenen Schlupfkurven von Gußeisen mit Gußeisen (Scheibenbreite $b = 25$ mm) waren diese zunächst bis zu großen Schlupfen hinauf regelmäßig. Die Schlupfe waren im Vergleich zu späteren Versuchen verhältnismäßig groß: bei erheblichen Umfangskräften (größeren Schlupfen) waren sie bei niederen Drehzahlen größer als bei höheren (s S. 16). Im Laufe der Versuche wurden die Schlupfe kleiner und die Kurven sehr unregelmäßig. Etwa vom 30. Versuch ab traten regelmäßige Schlupfe über 20 mm kaum noch auf. Bei den Versuchen mit einer Scheibenbreite von 2,5 mm war dieser letzte Zustand schon beim zweiten Versuch erreicht, ebenso bei den Versuchen Gußeisen mit Flußeisen spätestens beim dritten Versuch.

In allen Fällen trat also nach längerer oder kürzerer Zeit ein Zustand ein, bei dem die aufgenommenen Schlupfkurven häufig sehr unregelmäßig waren und etwa nach Abb. 27, Vers. 412 verliefen. Ein Einfluß des Umstandes, welcher Stoff bei Gußeisen — Flußeisen die treibende Scheibe bildete, war nicht zu erkennen. Die nächste Beobachtung war, daß der Reibungswert nach vorangegangenem, längerem Rollen mit geringer Umfangsbelastung im ersten Augenblick merklich kleiner war als nach Rollen mit großer Belastung oder

[1]) Vergl. Stahl und Eisen, Bd. 41, 1921, S. 1181.

gar reinem Gleiten. Wenn das Rollen der angetriebenen Scheibe im ersteren Falle bei einer gewissen Umfangskraft aussetzte, kam es jedoch bald unter dem Einfluß des reinen Gleitens wieder in Gang und setzte dann i. A. nicht wieder von selbst aus. Dementsprechend waren die Schlupfe klein, wenn die Umfangskraft vorher größer gewesen war, als die gerade wirksame, und groß, wenn die Umfangskraft vorher kleiner gewesen war. In beiden Fällen näherte sich ihre Größe dann einem konstanten Wert. Auf eine bemerkenswerte Ausnahme wird weiter unten eingegangen. Demnach konnte man also davon sprechen, daß sich bei Aenderung der Umfangskraft auch die Oberflächenbeschaffenheit änderte: wurde die Umfangskraft vergrößert, so wurde die Oberfläche »rauher«, d. h. der zugehörige Schlupf wurde allmählich kleiner und der Reibungswert größer und umgekehrt bei Verringerung der Umfangskraft. Unter bestimmten Umständen am »glattesten« war also die Oberfläche dann, wenn einige Zeit Rollen ohne Umfangskraft stattgefunden hatte, am »rauhesten«, wenn die treibende Scheibe einige Zeit zum Stillstehen gezwungen worden war.



($P = 6{,}67$ kg, $n = 35$ min^{-1}).
Abb. 27 Schlupfkurven von Gußeisen.

Es wurde darauf so vorgegangen, daß die Scheiben zunächst längere Zeit ohne Umfangsbelastung aber mit Normalbelastung rollten, dann bei bestimmter Belastung möglichst schnell eine Schlupfaufnahme gemacht wurde und die Scheiben vor jeder weiteren Aufnahme immer einige Minuten ohne Belastung rollten. Entsprechend ging bei anderen Versuchen jeder Einzelaufnahme Rollen mit möglichst hoher Umfangskraft voraus. Durch dieses Verfahren wurde angestrebt, daß bei allen Einzelversuchen einer Versuchsreihe möglichst die gleiche Oberflächenheit vorlag. Die derart gewonnenen Kurven verliefen, wie in Abb. 27 die Versuche 409 und 429 zeigen, in der Tat gleichmäßig, wenn die Versuche sehr sorgfältig ausgeführt wurden; andernfalls entstanden in den Kurven Knicke (Vers. 412). Der Verlauf der gleichmäßigen Kurven ist bemerkenswert; sie gehen vom Ursprung an auseinander, und zwar so, daß sie sich durch Aenderung des Ordinatenmaßstabes annähernd miteinander zur Deckung bringen lassen, daß also

Zahlentafel 9. Reibungskurven von Gußeisen mit Flußeisen.

Versuch Nr	P kg	R/P	g mm	Versuch Nr.	P kg	R/P	g mm
Rauhe Kurve				Glatte Kurve			
409	6,67	0,002	0,01	429	6,67	0,002	0,03
		0,032	0,25			0,015	0,31
		0,060	0,47			0,029	0,59
		0,090	0,81			0,042	1,04
		0,105	1,04			0,052	1,76
		0,120	1,33			0,063	2,21
		0,135	1,71			0,072	2,59
		0,150	2,42			0,078	3,51
		0,164	2,90			0,086	4,53
		0,177	3,73			0,093	6,78
		0,191	5,50			[0,099	6,58]
		0,206	10,4			0,107	7,90
						0,114	6,38

für gleich große Schlupfe das Verhältnis der dazugehörigen Umfangskräfte fast konstant ist, z. B. nach Zahlentafel 9 für die Versuche 409 und 429 (Abb. 27) 2,2 ÷ 2,5. Nahm man auf die Aenderung der Oberflächenbeschaffenheit keine Rücksicht, so schloß die Versuchskurve, wenn die Umfangskraft zunächst erhöht und dann erniedrigt wurde (oder umgekehrt), eine Schleife ein, die, wie nach vorhergehendem leicht verständlich ist, umso schmaler wurde, je längere Zeit vor jeder Aufnahme verging.

Nicht immer jedoch zeigte der Schlupf bei Aenderung der Umfangskraft das Bestreben, sich einem konstanten Wert zu nähern. Erhöhte man die Umfangskraft so weit, daß sie in der Nähe der höchst übertragbaren lag, so setzte die angetriebene Scheibe meist zunächst aus und begann dann bald ruckweise von neuem zu rollen, bis sie in Rucken eine Umdrehung gemacht hatte und daher durch das Hinwegschleifen der treibenden Scheibe über ihren ganzen Umfang die Oberflächen so weit aufgerauht waren, daß das gleichmäßige Rollen wieder einsetzte. Von diesem Augenblick jedoch nahm der Schlupf, wie Zahlentafel 10 zeigt, bei unveränderter Umfangskraft mit der Zeit nicht noch weiter ab, sondern ständig zu, so daß offenbar die aufgerauhten Scheiben trotz der hohen Umfangskraft gegenüber dem Zustand, bei dem das gleichmäßige Rollen begann, geglättet wurden. Diese Glättung ging so weit, daß nach einiger Zeit mit Ueberschreitung eines Schlupfes von rd. 14 bis 18 mm, die angetriebene Scheibe wieder aufhörte, gleichmäßig zu rollen und, wie zu Beginn, nur noch langsam und ruckweise gedreht wurde. Dabei schleifte die treibende Scheibe über sie hinweg und rauhte sie und sich selbst wieder auf. War die getriebene Scheibe, wie in den Versuchen der Zahlentafeln 10 und 11, aus Gußeisen, so waren nach einer vollen ruckweisen Umdrehung, die 1/2 bis 2 min dauerte, die Oberflächen wieder so weit aufgerauht, daß das gleichmäßige Rollen bei verhältnismäßig kleinen Schlupfen von neuem einsetzte. Es begann dann wieder das Glätten, das zum ruckweisen langsamen Rollen führte, und so konnte man beliebig weit fortfahren, wie dies Zahlentafel 11 zeigt. Wurde die Umfangskraft vermindert (Zahlentafel 11), so nahm die Zeitdauer des gleichmäßigen Rollens zu, die des ungleichmäßigen ab, bis schließlich bei Unterschreitung einer gewissen Umfangskraft das gleichmäßige Rollen nicht mehr aussetzte.

Hatte nach Ueberschreitung der augenblicklich übertragbaren Umfangskraft R_{max} die angetriebene Scheibe ausgesetzt, so kam sie häufig, wenn die Umfangskraft etwas verringert wurde, nicht wieder sogleich von selbst in Gang, wohl aber, wenn man mit der Hand nachhalf. Hielt man andererseits bei Umfangskräften, die etwas unterhalb R_{max} lagen, die getriebene Scheibe einen Augenblick mit der Hand an, so blieb sie stehen, obwohl sie vorher gut rollte. Diese Erscheinung läßt sich dadurch erklären, daß man annimmt, daß bei großen Gleitgeschwindigkeiten zwischen beiden Scheiben, wie sie beim Aussetzen der einen oder ihrem Anhalten mit der Hand auftreten, die Reibungszahl

Zahlentafel 10. Glätten und Aufrauhen bei Gußeisen.

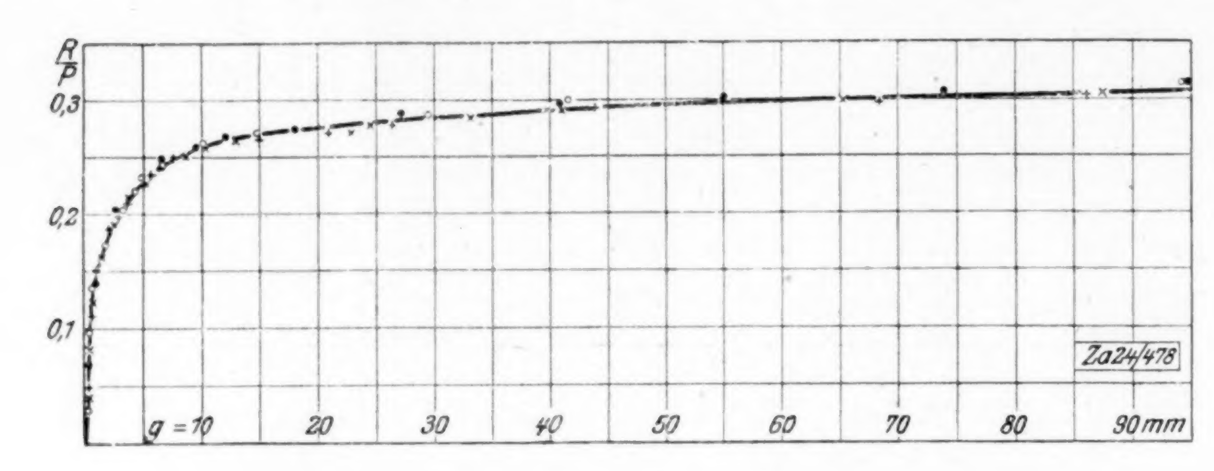
Versuch Nr.	Normalkraft P kg	Umfangskraft / Normalkraft R/P	Während des gleichmäßigen Rollens nach sec	aufgenommener Schlupf g mm	Versuch Nr.	Normalkraft P kg	Umfangskraft / Normalkraft R/P	Während des gleichmäßigen Rollens nach sec	aufgenommener Schlupf g mm
135	13,33	0,375	15	5,4	137	13,33	0,375	5	5,4
			60	8,1				30	10,3
			120	9,9				60	10,8
			180	14,4				95	11,1
			2·5	~ 950				130	10,1
136			15	6,3				170	9,0
			45	9,3				210	7,1
			75	10,0				240	9,1
			105	10,3				270	12,8
			135	10,7				285	~ 950
			165	12,9					
			195	13,9					
			220	~ 950					

Zahlentafel 11. **Glätten und Aufrauhen bei Gußeisen.**

Versuch Nr.	Normalkraft P kg	$\frac{\text{Umfangskraft}}{\text{Normalkraft}}$ R/P	Gleichmäßiges Rollen dauert sec	Während des gleichmäßigen Rollens gemessener Schlupf g mm	Ruckweises Rollen dauert sec	Anzahl der Umdrehungen während des ruckweisen Rollens
131	13,33	0,358			dauernd	
		0,352	60	—	dauernd	
		0,346	60	—	35	$1/2$?
			60	—	60	1
			60	—	55	1
			60	—	45	1
			60	—	60	1
			70	—	110	1
			65	—	65	1
			80	14,3	85	1
			75	17,9	75	1
			70	13,3	90	1
			70	13,0	75	1
			90	13,9	75	1
		0,340	125	12,6	70	1
			160	11,3	75	1
			165	14,4	40	1
			140	13,5	55	1
			210	11,0	55	1
			230	15,6	45	1
		0,333	315	14,1	50	1
			380	17,9	30	1
			430	9,0	25	1
		0,326	dauernd			
		nach	45	15,9		
			100	13,7		
			180	10,7		
			270	15,9		
			360	11,8		
			450	11,4		
			630	12,0		
			720	13,3		
			900	15,3		
			1080	13,2		

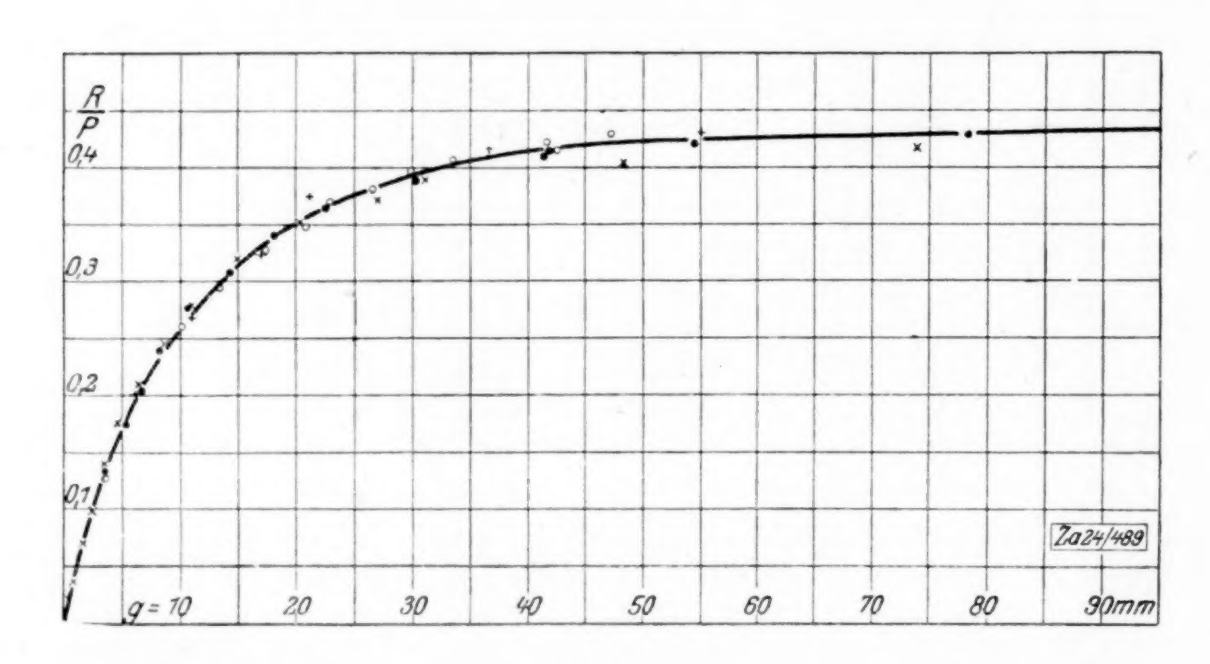
kleiner ist, als an der Grenze des Rollens. Sie trat jedoch nicht immer auf, da offenbar infolge fortschreitender Aufrauhung die angetriebene Scheibe häufig bald von selbst wieder ins gleichmäßige Rollen kam. Als Bestätigung obiger Auffassung können vielleicht auch die Versuche der Zahlentafel 10 angesehen werden, da sie zeigen, daß beim Wiedereinsetzen des Rollens der Schlupf bei 5 bis 6 mm, also nicht unbeträchtlich unterhalb des Maximalschlupfes (rd. 15 mm) lag, und es eine ganze Weile dauerte, bis die Oberfläche wieder so weit geglättet war, daß das Rollen aussetzte. Durch unmittelbare Versuche konnte ein Abfall des Reibungswertes mit zunehmender Gleitgeschwindigkeit wohl infolge zu großer Streuung nicht festgestellt werden.

11. Verhalten des Schlupfes bei verschiedenen Stoffpaaren. Messing-Flußeisen. Abb. 28 gibt den Verlauf einer Schlupfkurve für Messing mit Flußeisen wieder, solange die Oberflächenpolitur des Messings noch einigermaßen erhalten war. Im Gegensatz zu Gußeisen und Weißmetall konnten größere Schlupfe — bis zu rd. 200 mm — regelmäßig beobachtet werden; noch größere, regelmäßige wurden nicht festgestellt, ihre Aufnahme wurde auch wegen der dann starken Abnutzung vermieden. Die Kurve verläuft auch bei größeren Schlupfen noch deutlich ansteigend, so daß der Reibungswert sicher erst bei Schlupfen über 200 mm erreicht wird. Der Verlauf der Kurven bei verschiedenen Normalkräften zeigt keine wesentlichen Unterschiede.



(Versuche 227/30, $P = 6{,}67$ kg, $b = 25$ mm, $n = 35$ min^{-1}.)

Abb. 28 Schlupfkurve von Messing mit Flußeisen.



(Versuche 255/58, $P = 13{,}33$ kg, $b = 25$ mm, $n = 35$ min^{-1}.)

Abb. 29 Schlupfkurve von Messing mit Flußeisen (aufgerauht).

Mit beginnender Abnutzung wurden die Schlupfe zunächst sehr unregelmäßig und größer; falls die Bedingungen einige Zeit gleich blieben (s. S. 9), wurden sie schließlich wieder ziemlich gleichmäßig. Eine solche Kurve, z. B. in Abb. 29 für $P = 13{,}33$ kg erreicht zwar, wie Abb. 30 zeigt, einen erheblich höheren Reibungswert, als vor der Zerstörung der

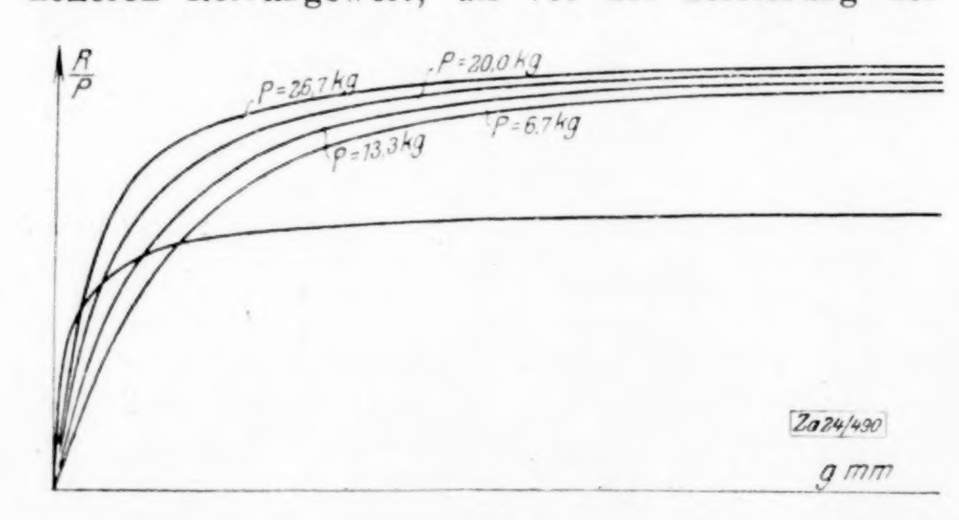
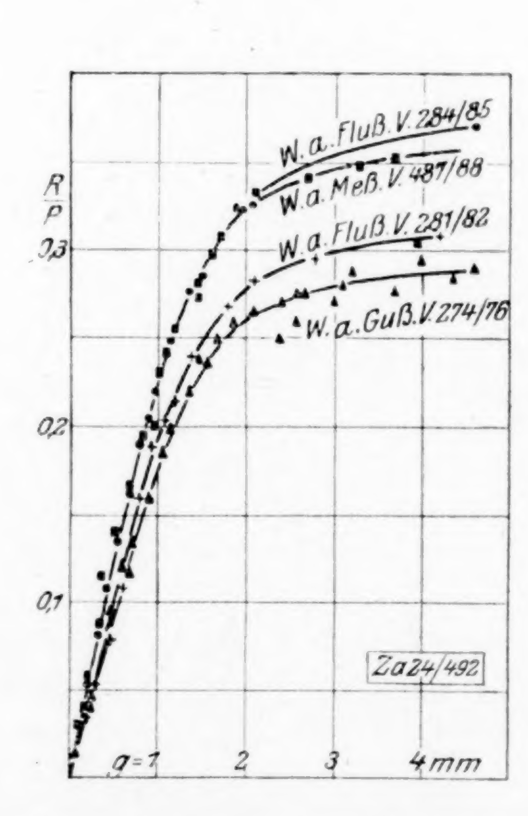


Abb. 30

Schlupfkurven von aufgerauhtem Messing bei verschiedenen Normalkräften. ($n = 35$ min^{-1}.)



($P = 6{,}67$ kg, $n = 35$ min^{-1}.)

Abb. 31 Schlupfkurven von Weißmetall mit anderen Metallen.

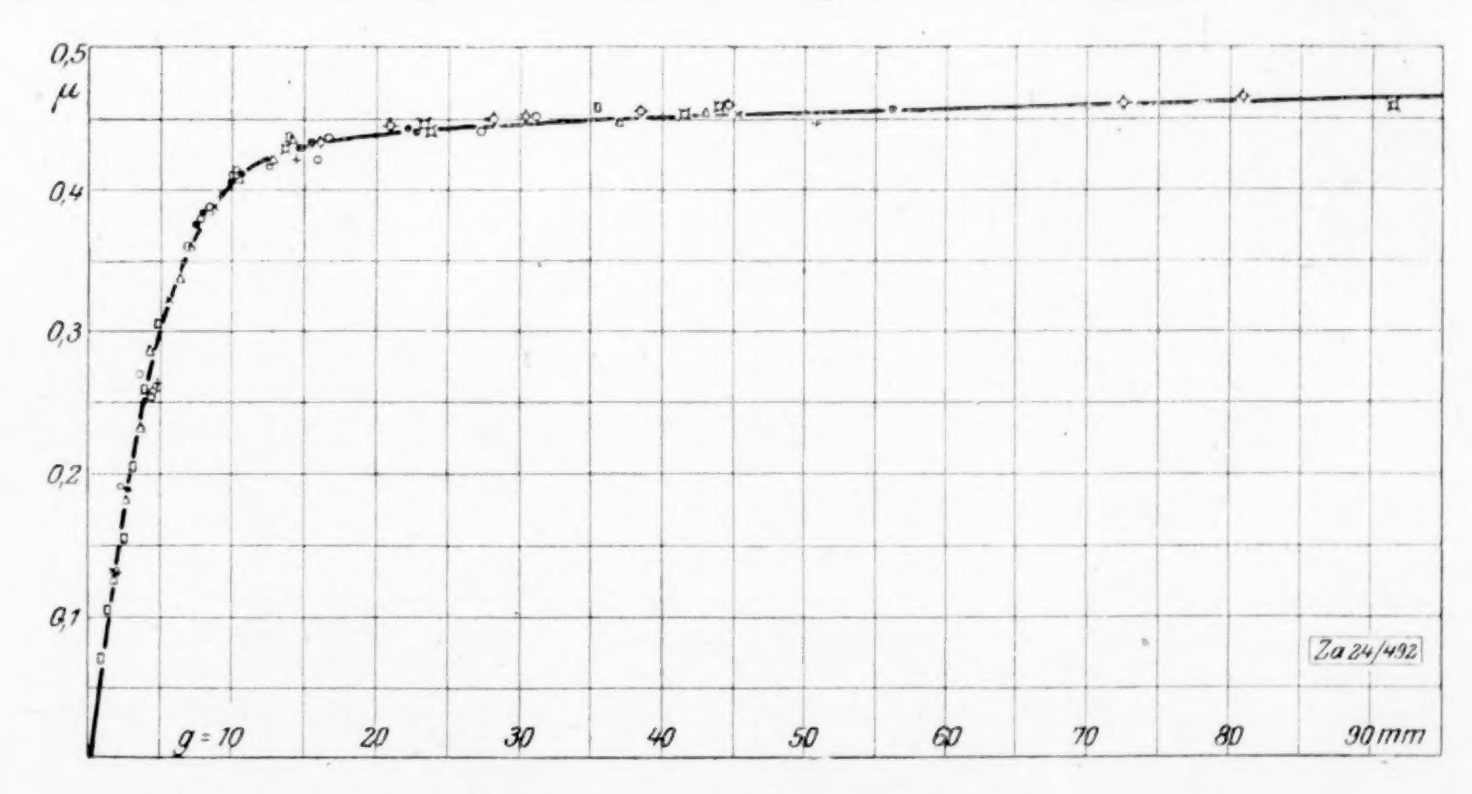
Oberflächenpolitur, läuft aber vom Ursprung aus flacher an als früher, und zwar um so flacher, je kleiner die Normalkraft ist[1]).

Messing-Gußeisen. Einigermaßen regelmäßige Schlupfkurven waren nicht zu gewinnen, da die aufgenommenen Schlupfe innerhalb weiter Grenzen streuten. Aehnlich wie bei Messing mit Flußeisen waren häufig größere Schlupfe zu beobachten; doch wurden sie meist sehr schnell kleiner, was jedenfalls auf Aufrauhung durch Mitwirkung des Gußeisens zurückzuführen ist.

Weißmetall-Flußeisen, Weißmetall-Gußeisen, Weißmetall-Messing. Von den untersuchten Stoffpaaren ergab Weißmetall mit anderen Metallen die gleichmäßigsten Schlupfkurven, die, wie Abb. 31 zeigt, einander sehr ähnlich verliefen. Der Reibungswert war fast immer bei einem Schlupf von rd. 5 mm erreicht; wurde zuweilen als Mittelwert über eine Reihe von Umdrehungen ein größerer Schlupf als 5 mm festgestellt, so nahmen die Einzelwerte stets entweder ab, bis der Schlupf kleiner als 5 mm geworden war, oder zu, bis die angetriebene Scheibe aussetzte.

War bei Weißmetall mit Metallen die angetriebene Scheibe bei Ueberschreitung der übertragbaren Umfangskraft zum Stehen gekommen, so mußte die Umfangskraft erheblich (rd. 10 vH) vermindert werden, ehe das Rollen wieder begann. Wartete man allerdings bei Weißmetall mit Gußeisen einige Zeit ab, so begann das Rollen schon bei Umfangskräften in der Nähe der Reibungskraft, bisweilen sogar bei dieser selber. Im ersten Augenblick nach dem Aussetzen war dazu jedoch, wie bei Weißmetall mit anderen Metallen eine erhebliche Erniedrigung der Umfangskraft erforderlich. Das Verhalten von Weißmetall mit Gußeisen ist daher wohl auf Aufrauhung infolge der Mitwirkung von Gußeisen zurückzuführen.

Kann die Oberfläche als gleichbleibend angenommen werden, so erlaubte also Rollen mit rd. 5 mm Schlupf die Uebertragung einer höheren Umfangskraft als reines Gleiten (Schlupf $= 2\pi r = \sim 950$ mm). Für Schlupfe zwischen diesen beiden Grenzwerten ließ sich die dazugehörige Umfangskraft nicht bestimmen, da die Versuchseinrichtung dann labile Verhältnisse ergibt. Um zu entscheiden, ob die Umfangskraft bei Ueberschreitung eines Schlupfes von rd. 5 mm plötzlich oder allmählich abfällt, wurde folgendermaßen verfahren: Bei einer Umfangskraft, bei der die angetriebene Scheibe noch lief, nach erzwungenem Stillstand jedoch nicht von selbst ins Rollen kam, wurde sie mit der Hand gedreht, und zwar langsamer als die treibende, also ein zwischen 5 und 950 mm liegender Schlupf erzwungen. Der Versuch zeigte, daß die angtriebene Scheibe dann



(Versuche 200/07, $P = 6{,}67$ kg, $n = 35$ min^{-1}.)

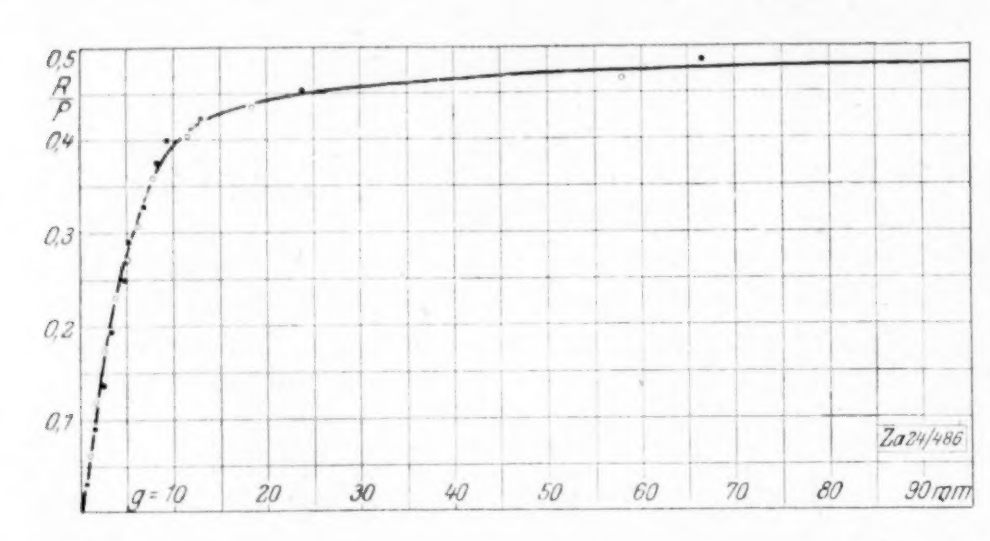
Abb. 32 Schlupfkurve von Holz mit Holz.

[1]) Die Wiederholung dieser Versuche bei 10fach kleinerer Scheibenbreite ($b = 2{,}5$ mm) zeigte überraschenderweise wieder annähernd das gleiche Bild wie Abb. 49: die Schlupfkurve z. B. für $P = 26{,}7$ kg verlief nicht steiler, als bei der Scheibenbreite 25 mm! Es ist also für ihren Verlauf die Normalkraft und nicht der Anpressungsdruck maßgebend.

wieder ins Rollen kam, und zwar bei einer umso höheren Umfangskraft, je schneller sie vorher mit der Hand gedreht worden war, also je kleiner der Schlupf war. Mit über 5 mm zunehmenden Schlupf fällt also die Schlupfkurve allmählich ab. Ob der Grund dafür in einer stetigen Abnahme des Reibungswertes mit zunehmender Gleitgeschwindigkeit[1]) zu suchen ist, läßt sich hieraus nicht mit Sicherheit folgern; doch sprechen für diese Annahme auch unmittelbare Versuche zur Bestimmung der Reibungszahl, bei denen die Reibungskraft bei einer Gleitgeschwindigkeit von ~ 0,6 m/sec. i. M. um rd. 4 vH höher, als bei ~ 1,0 m/sec. beobachtet wurde, allerdings bei einer Streuung von insgesamt 10 vH.

Holz – Holz, Holz – Metalle. Abb. 32 gibt eine Kurve von Holz mit Holz, Abb. 33 von Holz mit Messing, Abb. 34 eine Zusammenstellung einiger unter gleichen Bedingungen gewonnenen Kurven von Holz mit anderen Stoffen wieder. Der Verlauf der Kurven ist weitgehend ähnlich (s. w. u.).

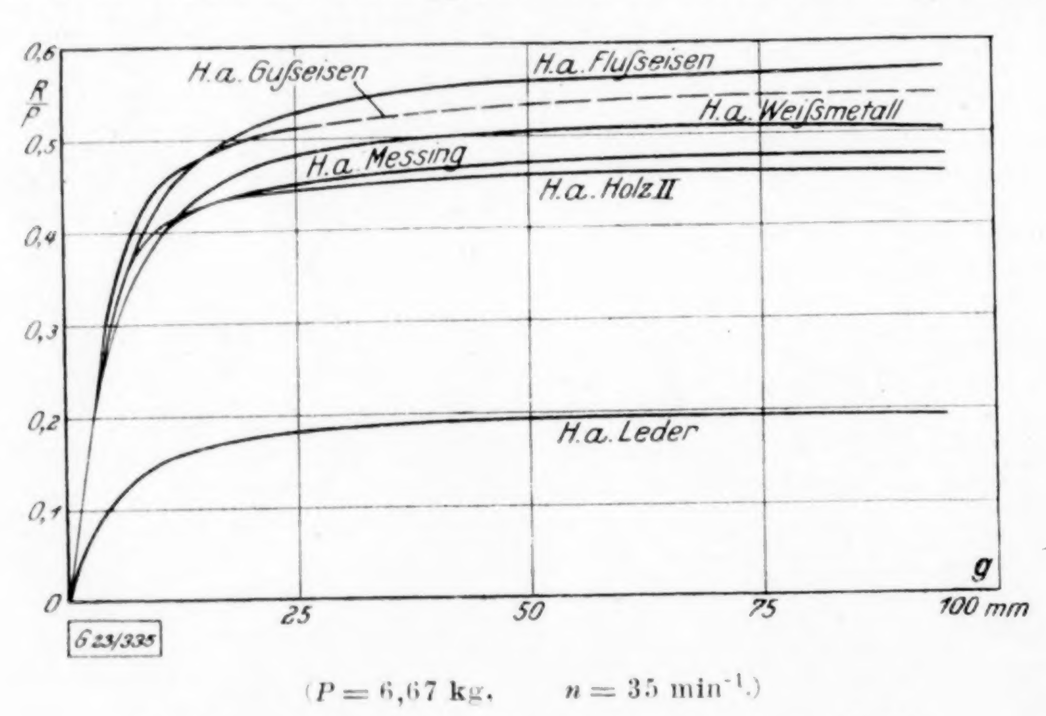
Leder – Metalle. Abb. 35 und 36 zeigen einige Schlupfkurven von Leder mit Gußeisen. Aus Abb. 36 ist die Wirkung des allmählichen Anstieges des Reibungswertes (Aufrauhung) zu erkennen.



(Versuche 479/80, $P = 6,67$ kg, $b = 25$ mm, $n = 35$ min^{-1}.)

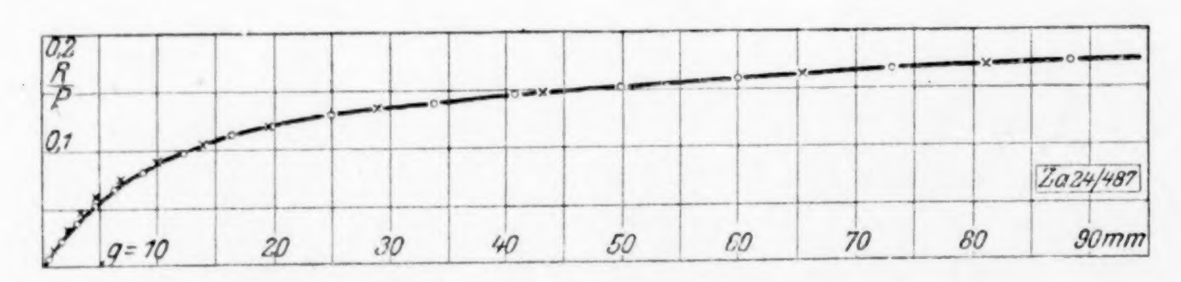
Abb. 33 Schlupfkurve von Holz mit Messing.

Leder — Holz. Die Reibungwerte von Leder mit Holz lagen, wie Abb. 37 zeigt, etwa in Höhe der niedrigsten Werte bei Leder mit Metallen, also erheblich niedriger, als bei Holz mit Holz oder Metallen (Abb. 34). Der Verlauf der Schlupfkurven weicht jedoch von dem der anderen Lederkurven deutlich ab; der Anstieg ist zunächst wesentlich steiler, die Stelle stärkster Krümmung deutlicher hervorgehoben und der oberste Teil flacher, als der der anderen Lederkurven, und die Kurve zeigt in diesen Punkten eine bessere Uebereinstimmung mit den Kurven von Holz mit Holz und Metallen (Abb. 34).



($P = 6,67$ kg, $n = 35$ min^{-1}.)

Abb. 34 Schlupfkurven von Holz mit anderen Stoffen.

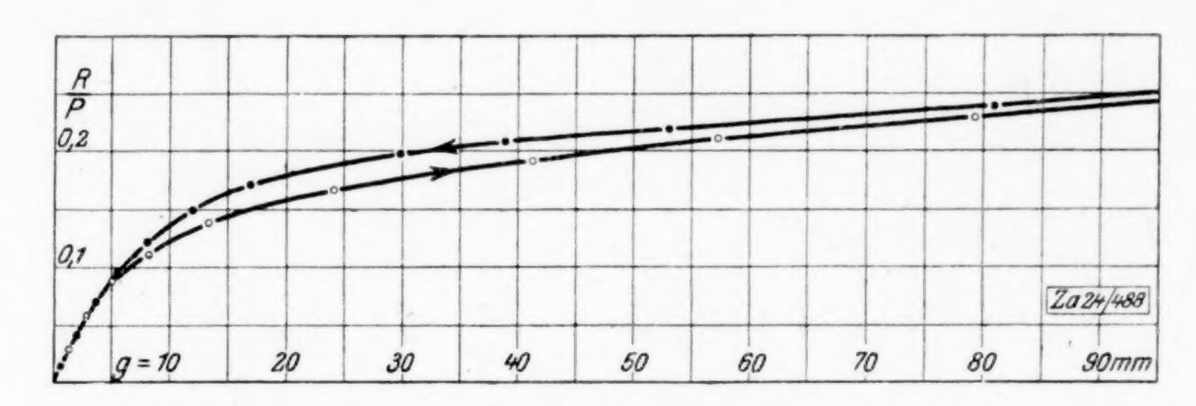


(Versuche 295/96, 298/99, $P = 6,67$ kg, $n = 35$ min^{-1}.)

Abb. 35 Schlupfkurve von Leder mit Gußeisen.

[1]) Enz. d. math. Wiss., Bd. IV, Artikel 10, R. v. Mises, S. 203.

12. Allgemeiner Verlauf der Schlupfkurven. Aus der Anordnung der im vorhergehenden Abschnitt beschriebenen Versuche ist erkenntlich, daß vielfach Stoffpaare, die im Stoff der einen Scheibe übereinstimmen, sich, was das Verhalten der Schlupfe anbetrifft, mehr oder weniger ähnlich verhielten. Abb. 34 läßt z. B. bei Holz mit Holz und Metallen das annähernde Zusammenfallen der unteren Teile aller unter gleichartigen Bedingungen aufgenommenen Kurven erkennen. In ihrem oberen Teil gehen sie dagegen infolge des Umstandes, daß die Reibungswerte verschieden sind, auseinander und verlaufen für größere Schlupfe annähernd parallel innerhalb eines Spielraums von ~ 20 vH ihrer Gesamthöhe. Deutlicher tritt die Aehnlichkeit verschiedener Kurven in Abb. 31 für Weißmetall mit anderen Metallen und Abb. 36 für Leder mit

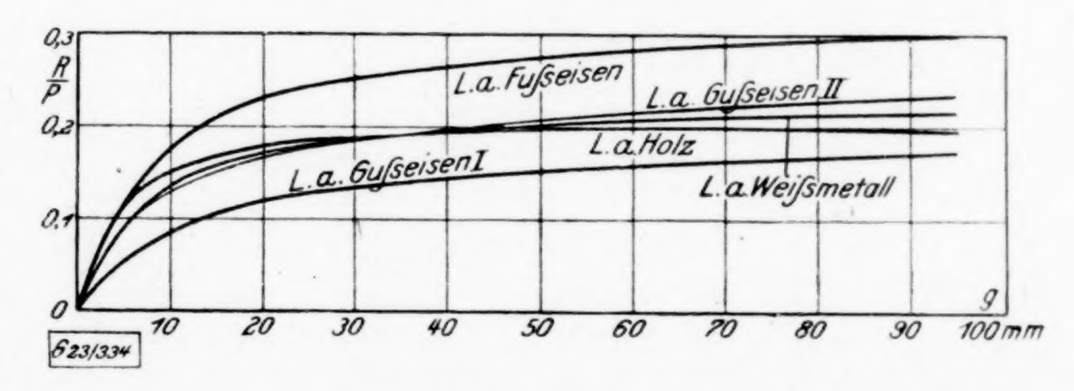


(Versuche 364/65, $P = 6,67$ kg, $n = 35$ min^{-1}.)

Abb. 36 Schlupfkurven von Leder mit Gußeisen.

Metallen hervor. Gleichzeitig lassen diese Abbildungen jedoch im Gegensatz zu Abb. 34 erkennen, daß die Kurven vom Ursprung an wie ein Büschel gekrümmter Strahlen auseinanderlaufen. Ebenso verlaufen die Kurven eines Stoffpaares bei verschiedenen Normalkräften, und nur, wenn die Reibungsbeiwerte annähernd gleich sind, fallen die Kurven fast aufeinander. Das annähernde Zusammenfallen der Holzkurven lediglich in ihrem unteren Teil bildet demnach eine Ausnahme und ist wohl auf die verhältnismäßig geringen Unterschiede in den Reibungswerten und die bei Holz starke Streuung, die den Verlauf der Kurven unsicher macht, zurückzuführen.

Um ein möglichst zahlenmäßig verfolgbares Bild vom Verlauf der Kurven verschiedener Stoffe zu gewinnen, wurde der Versuch gemacht, die Kurven durch Aenderung des Ordinatenmaßstabes bestmöglichst miteinander zur Deckung zu bringen. Zahlentafel 9 auf S. 21 läßt z. B. für die Kurven Vers. 409 und Vers. 429 der Abb. 25 erkennen, daß durch Multiplikation der Ordinaten von Kurve Versuch 429 mit 2,2 bis 2,5 diese mit Kurve Vers. 409 einigermaßen zusammenfällt. Abb. 38 bis 41 geben für einige Stoffe die auf

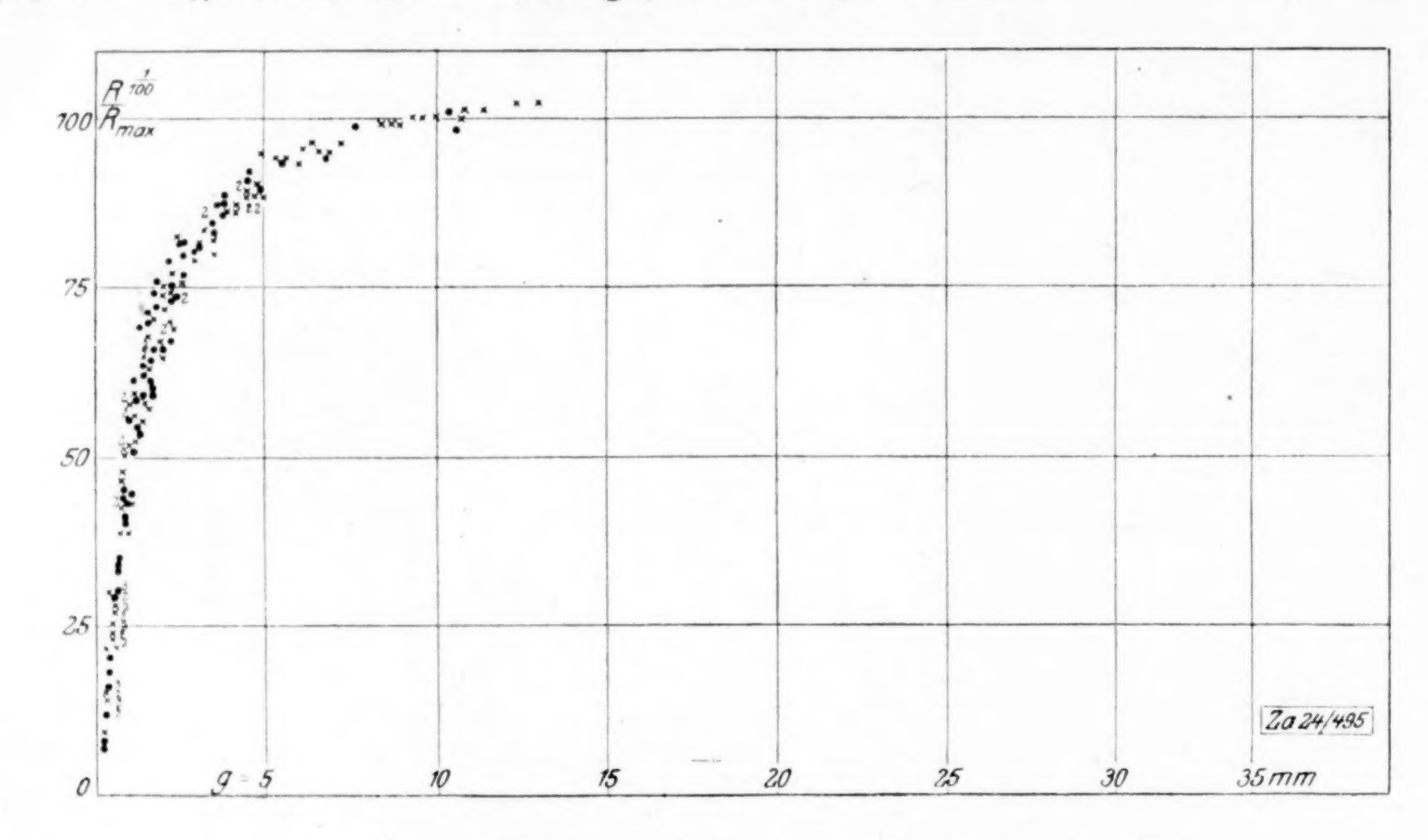


($P = 6,67$ kg, $n = 35$ min^{-1}.)

Abb. 37 Schlupfkurven von Leder mit anderen Stoffen.

diese Weise gewonnenen Scharen der Versuchspunkte wieder; der Maßstab ist so gewählt, daß der höchste Punkt (R_m) der durch die Punkte gezogenen Mittelkurve etwa die Ordinate 100 hat. In einer solchen Abbildung sind demnach zunächst fast alle Schlupfkurven eines Stoffes, bei denen die Resonanzstörung als gering angesehen werden konnte (S. 17), und mit Ausnahme der abweichenden zu Beginn der Versuche (S. 16) vereinigt. Bei genügender Uebereinstimmung sind auch alle Schlupfkurven sich ähnlich verhaltender Stoffpaare in einer Abbildung vereinigt. Ausgeschlossen sind weiterhin die Kurven von Messing mit Flußeisen nach Zerstörung der Oberflächenpolitur (S. 24) wegen ihres verschiedenartigen Verlaufes bei verschiedenen Normalkräften. Bei Flußeisen mit Flußeisen war infolge der starken Unregelmäßigkeiten eine Umformung nicht möglich (S. 20), bei

Messing mit Gußeisen nur in vereinzelten Fällen (S. 25)[1]. Die Streuung der Versuchspunkte ist je nach dem Stoffe sehr verschieden, geht jedoch nicht wesentlich über die bei Einzelversuchen beobachtete Streuung hinaus. Am geringsten ist sie bei Weißmetall ($< \pm$ 10 vH), erheblicher bei Messing ($\infty \pm$ 30 vH) und Holz.



Gußeisen { • mit Flußeisen (Versuche 404/07, 409/10, 412, 429/30), × mit Gußeisen (Versuche 59/62, 67/68, 464/68).

Abb. 38 Schlupfkurven von Gußeisen nach der Umformung.

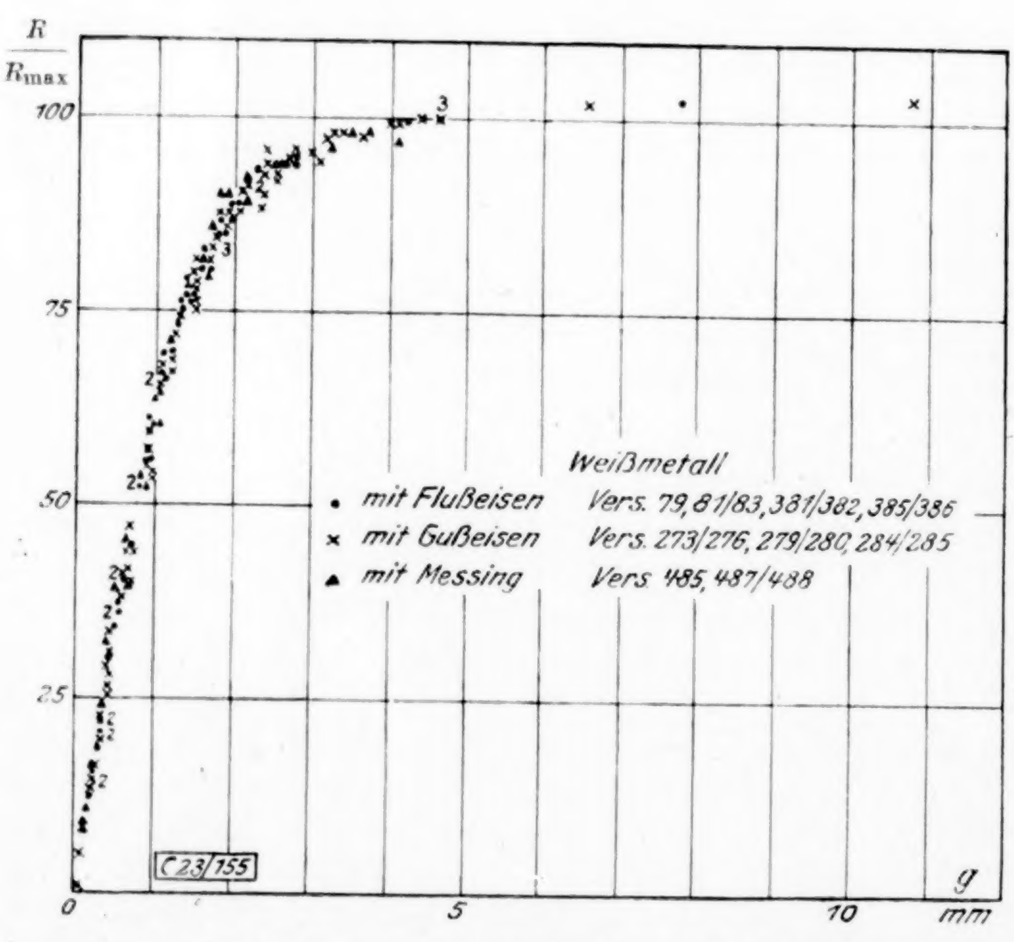
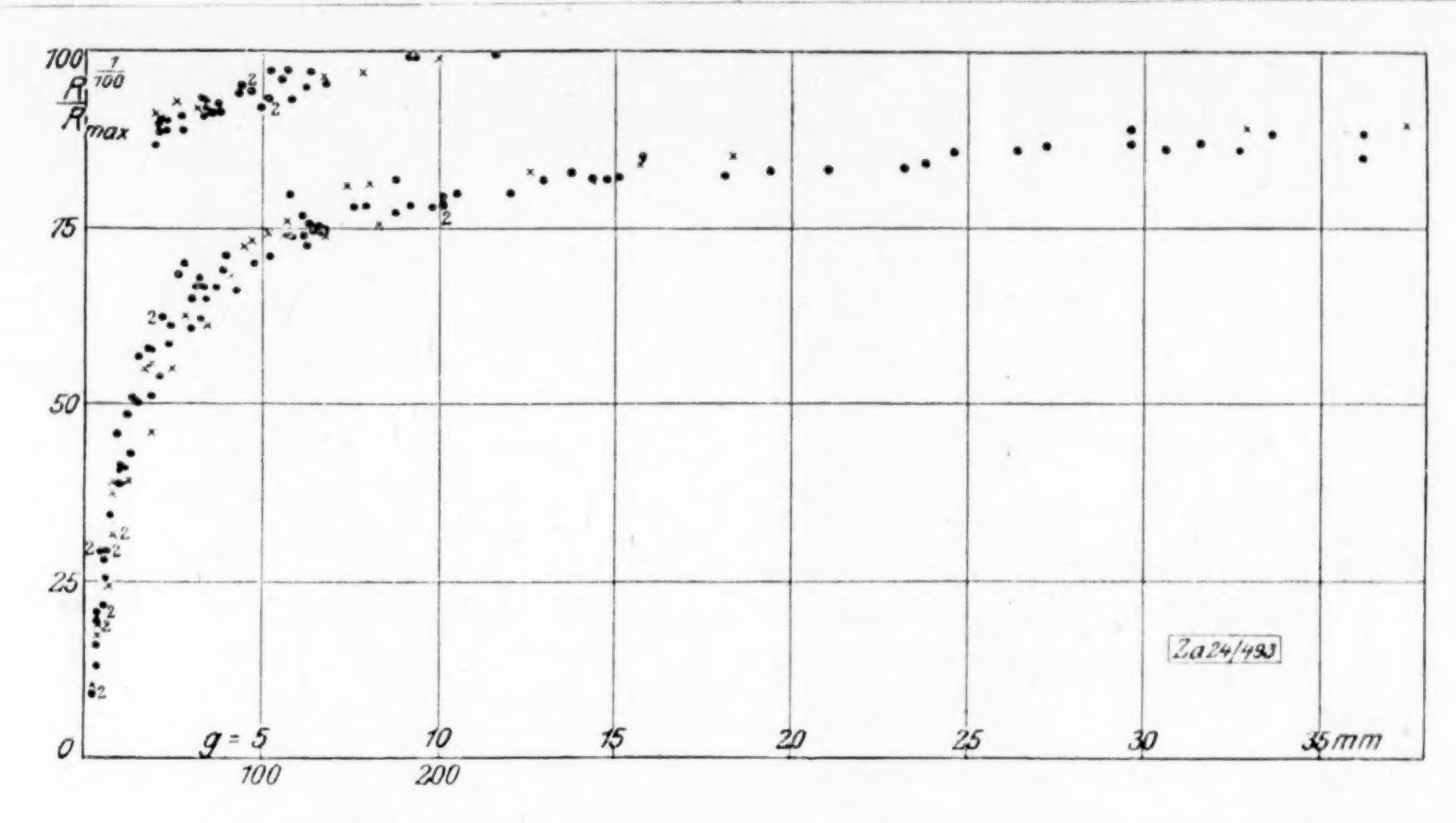


Abb. 39 Schlupfkurven von Weißmetall nach der Umformung.

Der Vergleich der in Abb. 42 zusammengestellten Kurven erweist die Berechtigung, sie nach dem Stoff der einen Scheibe zu bezeichnen, und zwar dem seinen Festigkeits- und Abnutzungseigenschaften nach als weniger beständigen anzusprechenden. Denn die Kurven solcher Stoffpaare, die im Material beider Scheiben oder dem weniger beständigen verschieden sind, weichen im Gegensatz zu denen der Stoffpaare, die im weniger beständigen Stoff übereinstimmen, erheblich voneinander ab. Alle Kurven von Metallen steigen zunächst ziemlich steil und geradlinig an, zeigen jedoch im oberen, z. T. stärker gekrümmten Teil einen verschiedenartigen Verlauf, insofern, als die Kurve für

[1]) Bei Gußeisen war es notwendig, die Oberflächen vor jeder Einzel-Schlupfmessung in den gleichen Zustand zu bringen (s. S. 21). Nur solche Kurven, event. Kurvenstücke, bei denen diese Bedingung erfüllt war, wurden berücksichtigt.

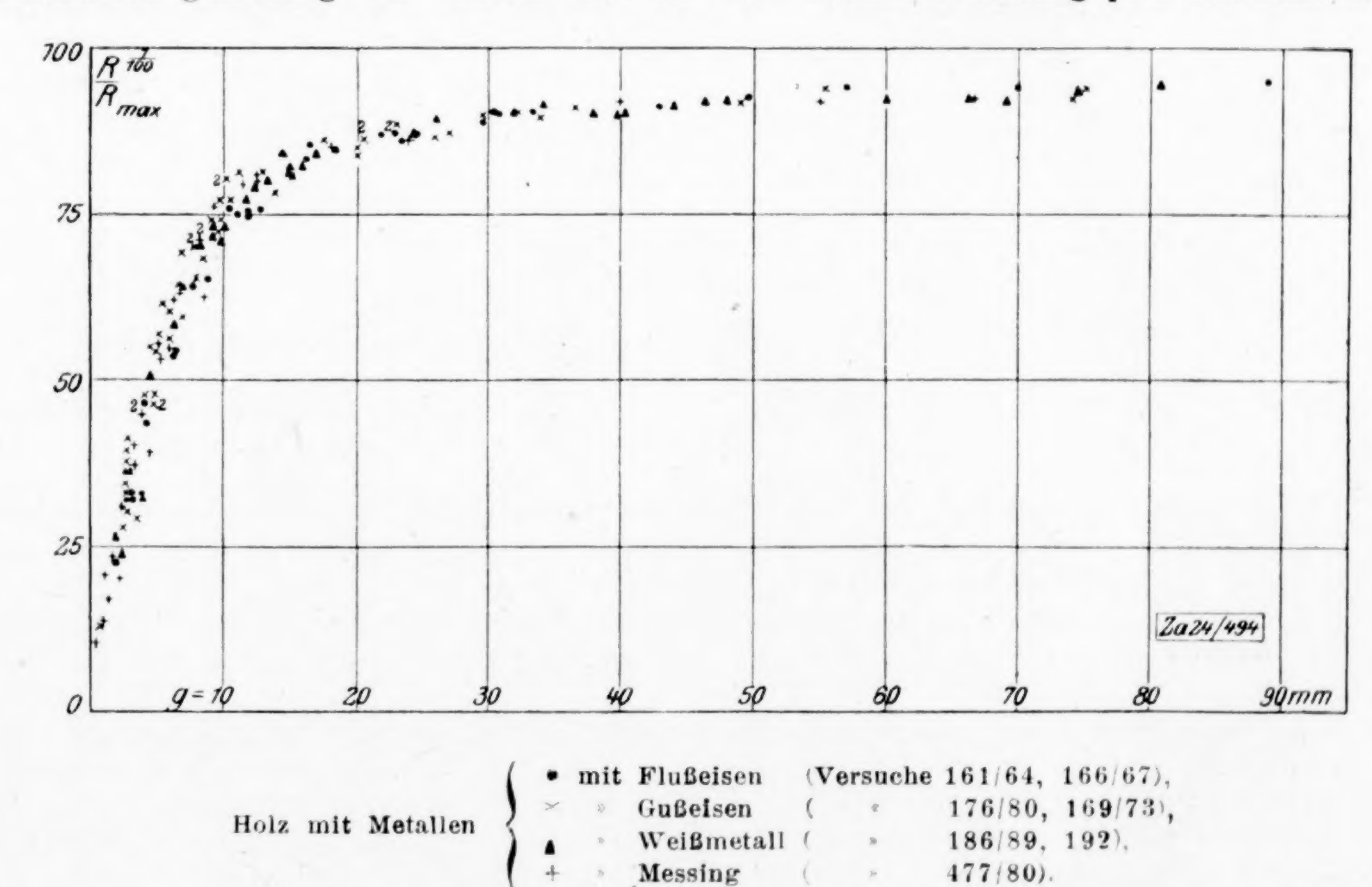


Messing { • mit Flußeisen (Versuche 224/25, 227/30, 235/36, 240/41, 243/44), × mit Gußeisen (Versuche 89/96).

Abb. 40 Schlupfkurven von Messing nach der Umformung.

Weißmetall und Gußeisen bei kleinen Schlupfwerten, Gußeisen rd. 15 mm (S. 22), Weißmetall rd. 5 mm (S. 25), abbrechen, die Kurve für Messing dagegen hinter der stärksten Krümmung noch eine längere Strecke mit geringer Steigung fast geradlinig verläuft und nicht früher, als bei Schlupfen von 200 bis 300 mm ihren höchsten Punkt erreicht (S. 23). Aehnlich, jedoch zunächst flacher ansteigend wie die Messingkurve, gehen auch die Kurven von Holz und Leder, letztere steigen auch in ihrem oberen Teil noch deutlich an und erreichen ihren höchsten Punkt sicher erst beim Aussetzen der getriebenen Scheibe, also bei einem Schlupf $2\pi r =$ rd. 950 mm.

Mit Ausnahme von Leder auf Metallen steigen die Kurven in ihrem ersten Teil annähernd geradlinig an. Besser als aus der Zusammenstellung der Mittelkurven in



Holz mit Metallen { • mit Flußeisen (Versuche 161/64, 166/67), × » Gußeisen (» 176/80, 169/73), ▲ » Weißmetall (» 186/89, 192), + » Messing (» 477/80).

Abb. 41 Schlupfkurven von Holz mit Metallen nach der Umformung.

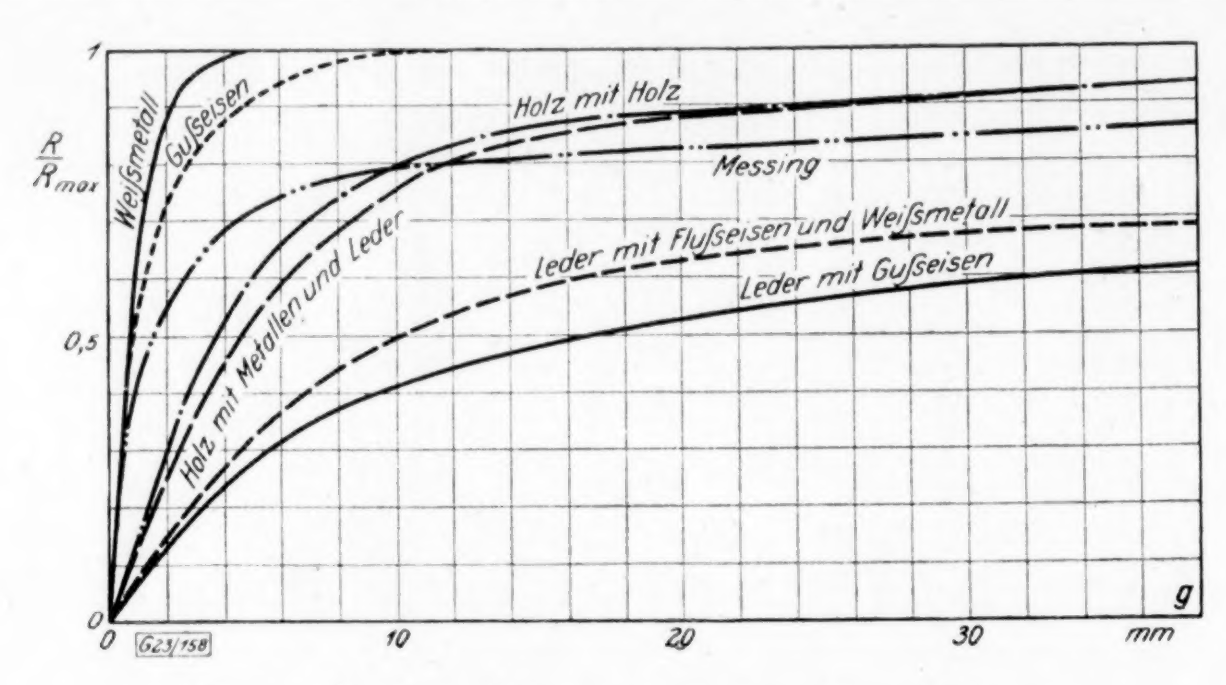


Abb. 42 Zusammenstellung von umgeformten Schlupfkurven.

Abb. 41 läßt sich der Verlauf des ersten Teiles aus den in Abschnitt B dargestellten Einzelversuchen ersehen. Dort zeigt sich, daß auch Gußeisen mit Flußeisen und Gußeisen (Abb. 26) schon bald, wenn auch zunächst nur schwach, von der Geraden abzubiegen beginnt, während die anderen Stoffe bis etwa zur Umfangskraft 0,4 R_m (0,4 R_{max}), Flußeisen auf Flußeisen sogar wesentlich höher, annähernd geradlinig verlaufen. Bei 0,3 R_m (in Abb. 38 bis 41: Ordinate 30) beträgt der Schlupf der Kurven von Weißmetall und Gußeisen (auf härteren Stoffen) i. M. 0,45 mm, von Messing auf Flußeisen i. M. 0,6 mm, bei Holz auf Holz i. M. 2,1 mm, bei Holz auf Metallen und Leder i. M. 2,4 mm, bei Leder auf Metallen 4,6 bis 5,6 mm, bei den Holzkurven also annähernd das 4fache, bei den Lederkurven das 9fache der Metallkurven.

Charakteristisch für den Verlauf einer Kurve ist demnach der Schlupf, bei dem die angetriebene Scheibe aussetzt. Weiterhin kann die Steigung der Kurve zu ihrer Festlegung dienen; und zwar sei als Maß der Steigung die Strecke α gewählt, die die Gerade, der sich der unterste Teil der Kurve am besten annähert, auf der Parallelen zur Abszissenachse durch die Ordinaten 100 abschneidet, d. h. derjenige Schlupf, den die Scheiben unmittelbar vor dem Aussetzen aufweisen würden, falls der zu Beginn annähernd lineare Zusammenhang zwischen Schlupf und Umfangskraft erhalten bliebe. Diese Werte (α in mm, α' in vT) sind in Zahlentafel 12a zussmmengestellt.

Zahlentafel 12. Konstanten der Schlupf- und Zugkurven.

Stoff	a		b		
	α mm	α' vT	Kz kg/mm²	E kg/mm²	ε vT
Gußeisen	1,7	1,6	2,2	10 000	2,2
Messing	2,1	2,0	1,5	8 000	1,9
Weißmetall	1,5	1,4	0,4	2 750	1,45
Holz	7—8	7	1,6	1 600	10,0

13. Formänderungen der Scheiben als wesentliche Ursache des Schlupfes.

Die Beobachtungen, die die Aufstellung der in Abb. 42 wiedergegebenen Kurven ermöglichen, seien noch einmal hervorgehoben:

1. Bei einigen Stoffen konnte nach Unterdrückung der Resonanzstörungen der Schlupf durchweg als unabhängig von der Drehzahl angesehen werden, bei anderen nur bei kleineren Schlupfen.

2. Bei letzteren nahmen größere Schlupfe mit zunehmender Drehzahl ab. Es sind dies durchweg Stoffe, von denen bekannt ist, daß die Reibungskraft mit wachsender Gleitgeschwindigkeit (wenigstens im Gebiet kleiner Gleitgeschwindigkeiten) größer wird.

3. Werden für diese Stoffe auf Grund des aus Versuchen bekannten Zusammenhanges zwischen Reibungskraft und Gleitgeschwindigkeit (Gleit-) Schlupfe berechnet, so sind sie bei den verwendeten Drehzahlen erheblich kleiner als die aufgenommenen.

4. Die Schlupfkurven eines Stoffpaares gehen bei verschiedenen Bedingungen als ein Büschel sich nicht schneidender Strahlen vom Ursprung aus und fallen bei annähernder Gleichheit der Reibungswerte aufeinander. Sie brechen also auch immer bei annähernd gleichen Schlupfen ab. Insbesondere haben innerhalb gewisser Grenzen weder die Größe der Normalkraft, noch die Breite der Lauffläche, noch der Umstand, welcher Stoff die treibende Scheibe bildete, irgendwelchen erkennbaren Einfluß.

5. Die Kurven von Stoffpaaren, die im »weniger beständigen« Stoff übereinstimmen, zeigen einen weitgehend ähnlichen Verlauf [1]).

Aus diesen Tatsachen schließen wir, daß der Hauptgrund für das Auftreten von Schlupfen in Festigkeitseigenschaften der einzelnen Stoffe zu suchen ist. Deformationen der beiden Scheiben — besonders der weicheren — infolge des gemeinsamen Einflusses von Normal- und Umfangskraft kommen im wesentlichen nur in der Nähe der Berührungsfläche in Frage; und können wir uns vorstellen, daß hauptsächlich durch Schubspannungen hervorgerufene Winkeländerungen und Abbiegungen der Scheibenradien sowie Dehnungen und Streckungen in tangentialer Richtung stattfinden. Und zwar ist entsprechend den zu übertragenden Spannungen Dehnung der ablaufenden und Stauchung der auflaufenden Teile der treibenden Scheibe und umgekehrt bei der getriebenen Scheibe zu erwarten. Das Auftreten von »Formänderungsschlupfen« ohne Gleitschlupfe kann man sich durch die Annahme erklären, daß Teilchen der Berührungsfläche sich zwar z. T. gegeneinander verschieben, daß aber die Berührungsflächen als Ganzes nicht übereinander gleiten [2]), derart, daß Teilchen der auflaufenden Seite aneinander haften und also gestauchte Teilchen der treibenden Scheibe auf gedehnten der getriebenen ohne Gleiten ablaufen. Etwaiger Gleitschlupf könnte sich dann diesem Formänderungsschlupf überlagern.

Betrachten wir z. B. den Augenblick, in dem die getriebene Scheibe bei Erhöhung der Umfangskraft aussetzt. Die Deutung der Schlupfe als Formänderungsschlupfe drängt uns die Erklärung auf, daß hier ein Versagen des Materials stattfindet, sei es, daß die Materialteilchen an irgendeiner Stelle ihren Zusammenhang verlieren oder sich in einer Weise verschieben, daß allgemein ein Gleiten der Berührungsflächen übereinander ermöglicht wird. Der Verlauf der Schlupfkurven entspricht durchaus dieser Deutung, sie zeigen das übliche Aussehen einer Festigkeitskurve, z. B. eines Zug- oder Schubdiagramms.

Da wir uns nun die Entstehung von Formänderungsschlupfen durch das Ablaufen gestauchter Materialteilchen auf gedehnten vorstellen, würde nach dieser Auffassung ein Aussetzen dann stattfinden, wenn die Dehnung oder Stauchung des Materials an irgend einer für die Kraftübertragung wesentlichen Stelle das zulässige Maß überschreitet [3]). Und da z. B. Metalle weniger dehnbar als stauchbar [4]) sind, wird ähnlich wie beim gewöhnlichen Biegeversuch das Versagen stets an der Zugseite des weniger beständigen (weicheren) Stoffes, gleichgültig, ob er die treibende oder getriebene Scheibe bildet, stattfinden.

Nach dieser Vorstellung müßte also hauptsächlich die Dehnbarkeit des weniger beständigen Stoffes unter den jeweiligen Verhältnissen die Größe des Schlupfes bedingen, und der Schlupf daher in irgendwelchen zahlenmäßigen Beziehungen zu den Formänderungen der Stoffe an der Haftstelle stehen [5]). Diese entziehen sich jedoch vorläufig unserer Kenntnis. Ebensowenig ist uns die Spannungsdehnungskurve der Teilchen an

---

[1]) Hier sei jedoch darauf hingewiesen, daß der »beständigere« Stoff, abgesehen davon, daß die Größe der Reibungswerte von ihm abhängt, anscheinend auch den Verlauf der Schlupfkurven in geringem Maße beeinflußt, z. B., wie aus Abb. 37 ersichtlich ist, bei Leder. Besonders die Mitwirkung von Gußeisen machte sich stets durch verstärkte Streuung bemerkbar.

[2]) Vergl. Bach, Maschinenelemente, 10. Aufl., Berlin 1908, S. 415.

[3]) Ob dieser Vorgang vielleicht im Grunde identisch ist mit der Ueberschreitung der Schubgrenze und damit auf Schubspannungen als letzte Ursache führt sei dahingestellt; unsere heutige Kenntnis der Festigkeitserscheinungen gibt uns hierüber keinen Aufschluß. Ebensowenig ist bisher die Frage entschieden, welche Größe für das Versagen des Materials entscheidend ist, ob eine Spannung oder eine Formänderung.

[4]) Durch Versuche des Verfassers an zahlreichen Stoffen nachgewiesen, wenn als Maß der Dehnung die Bruchquerschnittsverminderung, als Maß der Stauchung die spez. Bruchhöhenabnahme angeführt wird. (Z. f. Metallkunde, Bd. 16, Februar 1924.) Vergl. Ludwik, Technol. Mechanik. Berlin 1908.

[5]) Möglicherweise eröffnet sich durch Weiterführung dieses Gedankens ein Weg zur zahlenmäßigen Erfassung des Reibungsproblems. Auch z. B. beim Kugeldruckhärteversuch ergibt sich eine ähnliche Frage. An den bleibenden Verformungen beteiligt sich ein bestimmtes Volumen, daß weitgehend von den Festigkeitseigenschaften des betr. Stoffes abhängt. Vergl. Deutsch, Forschungsarb., Sonderreihe M. Berlin 1919. S. 7.

der Zugseite beim Biegeversuch bekannt, dessen Formänderungen u. E. mit den hier auftretenden gewisse Parallelen zeigen. Von allgemeiner bekannten Formänderungskurven dürfte noch die des Zugversuches mit der gesuchten entferntere Aehnlichkeit aufweisen, möglicherweise auch darin, daß der beanspruchte Querschnitt, wie auch an der Zugseite des Biegeversuches, mit fortschreitender Formänderung abnimmt, wodurch sich die Kurve in ihrem oberen Teil i. A. stärker krümmt, als z. B. die Torsions- oder gar Stauchkurve[1]).

Der untere Teil der Schlupfkurven müßte sein Entstehen dann wesentlich elastischen Formänderungen verdanken, und der auf S. 30 eingeführte Schlupf α, den die Tangente an die Schlupfkurve im Ursprung auf der Parallelen zur Abszissenachse durch den Reibungswert abschneidet, müßte einem Wert ε entsprechen, den die Tangente an die Zugdehnungskurve im Ursprung auf der Parallelen zur Abszissenachse durch die Bruchkraft abschneidet. Bekanntlich ist aber $\varepsilon = \frac{K_z}{E}$, worin K_z die Zugfestigkeit und E den Elastizitätsmodul des betreffenden Stoffes bedeuten. Diese Werte, für Metalle der Hütte[2]), für Holz der Aufstellung auf S. 6 entnommen, sind in Zahlentafel 12 b zusammengestellt. Der Vergleich mit den Werten α in Zahlentafel 12 a zeigt, daß sie nicht nur der Größenordnung, sondern auch der absoluten Größe (in vT) nach ungefähr übereinstimmen[3]).

Hier begegnet uns jedoch eine erhebliche Schwierigkeit, die nicht unerwähnt bleiben darf. Die Schlupfe, sowie auch die Werte α, wurden auf den Umfang der treibenden Scheibe bezogen, d. h. aber nach unserer Anschauung, daß nur die Formänderungen einer Scheibe berücksichtigt werden. Wenn dies auch bei Stoffpaaren, von denen der eine Stoff erheblich beständiger ist, möglich erscheint, so versagt unsere Anschauung jedoch in den Fällen, wo beide Scheiben aus dem gleichen Stoffe sind. Noch merkwürdiger wäre das Verhalten von Holz mit Leder, wo Holz für den Verlauf der Kurve ausschlaggebend erscheint (Abb. 42, S. 30), obwohl Leder weitaus formänderungsfähiger ist, derart, daß die umgeformten Kurven Holz mit Leder und Holz mit Holz und Metallen fast zusammenfallen, obwohl die Metallschlupfe bei kleinen Umfangskräften etwa $^1/_4$-, die Lederschlupfe dagegen etwa das 2-fache der Holzschlupfe betragen. Dieser Punkt ist noch völlig ungeklärt. Vielleicht würde es möglich sein, hier mit Hilfe von weichen Gummischeiben und — nach einem Vorschlag des leider so früh verstorbenen Hrn. Prof. Gümbel — mit Borsten besetzten Scheiben einen Einblick zu gewinnen.

Offen bleibt dann noch die Frage, wieso bei hoher Normalkraft die Uebertragung einer weit größeren Umfangskraft als bei niedriger möglich ist. Eine verständliche Erklärung finden wir nur auf Grund des auf S. 13 entwickelten Gedankens: die Uebertragung einer hohen Umfangskraft wird dadurch ermöglicht, daß durch die hohe Normalkraft die Wirkung mehr in die Tiefe geht und ein größeres Volumen (Fläche?) als bei niedriger Normalkraft zum Aufnehmen der Umfangskraft mit herangezogen wird.

14. Gleitschlupf. Wenn somit der Hauptteil der Schlupfe als Formänderungsschlupf angesprochen wird, so muß jedoch bei einigen Stoffen ein mit zunehmender Normalkraft wachsender Anteil als Gleitschlupf angesehen werden. Bei Messing mit Flußeisen und Holz mit Holz und anderen Stoffen konnte die Beobachtung, die hauptsächlich für das Auftreten von Gleitschlupfen spricht, nämlich die Abnahme der Schlupfe mit zunehmender Drehzahl nur bei erheblichen Umfangskräften, etwa $> 0{,}8\ R_{max}$ gemacht werden. Bei Holz erscheint die Annahme berechtigt, daß das Verhalten auf eine Annäherung an halbflüssige Reibung zurückzuführen ist, da die Holzoberfläche während der Versuche eine dunkle Substanz ausschied. Sehr wahrscheinlich wird diese Annahme für Leder mit Metallen, wo die Abnahme der Schlupfe mit zunehmender Drehzahl, wie Zahlentafel 6 zeigt bis zu kleinen Umfangskräften hinab beobachtet werden konnte. Worauf das Auftreten von Gleitschlupfen bei poliertem Messing mit Flußeisen in Uebereinstimmung mit den Versuchen von Jacob zurückzuführen ist, ist nicht festgestellt.

334

[1]) Vergl. P. Ludwik, Technologische Mechanik. Berlin 1908. S. 30.

[2]) Hütte, 22. Aufl., I. Bd., S. 487 ff. Die Werte für Weißmetall beziehen sich auf einen Stoff mit 80 *Pb*, 15 *Sb*, 5 *Sn*, der von den in der Hütte angeführten dem hier verwendeten in der Zusammensetzung am nächsten kommt.

[3]) Leder mit Metallen ist nicht mit aufgenommen, da weder der Verlauf der Schlupfkurve dem der Zugdehnungskurve ähnlich sieht, noch α' annähernd so groß ist wie ε ($\varepsilon_l \sim 10\ \alpha_l$).

Geometrische Untersuchung der Theorie der Bewegung des Grundwassers im Gerölle und der Wasserfilterung durch Sand.

Von **LUDWIG BURMESTER** in München.

Mit Tafel I.

Die Theorie zieht die Praxis nach sich,
wie der Magnet das Eisen. Gauss.

Bei der im Folgenden dargelegten Theorie wird vorausgesetzt, daß der Grundwasserträger und der Filtersand aus gleichen Kugeln besteht, durch deren Zwischenräume die Bewegung des Wassers erfolgt. Deshalb ist die Kenntnis dieser Zwischenräume erforderlich. Den Menschen ist nur eine geringe Begabung der Raumvorstellung verliehen und auch die begabtesten sind genötigt, instruktive Zeichnungen und Modelle zu verwenden, um eine Vorstellung von den mannigfachen Raumgestaltungen zu ermöglichen. In der Geometrie sind die eigenartig gestalteten Zwischenräume in den Lagerungen gleicher Kugeln noch nicht eingehend behandelt. Aus diesem Grunde und wegen des Mangels an Raumanschauung ist in dieser Theorie Unrichtiges und Irrtümliches entstanden; daher ist es notwendig, sie streng zu begründen, damit sie auch der Praxis folgerichtig dienen kann.

Wir werden vorbereitend mit den ebenen Lagerungen gleicher Kreise beginnen, und die sich ergebenden selbstverständlich erscheinenden Beziehungen nicht verschmähen, weil wir dadurch Analogien für die Lagerungen gleicher Kugeln erhalten, und weil in dieser Weise das Verständnis vom Leichten zum Schweren geführt wird. Denn bei den so didaktisch abgeleiteten Sätzen tritt das Eigenartige in dem Besondern deutlicher hervor, als es sich aus dem Allgemeinen ergeben würde. Zwei Arten der Lagerungen werden nur in Betracht kommen: Erstens die einfachsten Lagerungen, bei denen jeder innere Kreis von vier Kreisen in den Endpunkten zweier rechtwinkligen Durchmesser, und jede innere Kugel von sechs Kugeln in den Endpunkten dreier rechtwinkligen Durchmesser berührt wird. Zweitens die engsten Lagerungen, bei denen jeder innere Kreis von sechs Kreisen und jede innere Kugel von zwölf Kugeln berührt wird. Die einfachsten Lagerungen sind dazu bestimmt, aus ihnen die engsten abzuleiten, und dadurch eine tiefere Kenntnis der Gestaltung der Zwischenräume in der engsten Lagerung gleicher Kugeln zu erlangen, wobei auch als ebene Schnitte der Zwischenräume die einfachste und die engste Lagerung gleicher Kreise vorkommen.

Robert Hooke[1]) scheint der erste gewesen zu sein, der, um sich eine Vorstellung von dem Bau der Kristalle zu bilden, die einfachste und die engste Lagerung gleicher Kügelchen in skizzenhaften Zeichnungen angedeutet hat. Zu demselben Zweck wurden von William Hyde Wollaston[2]) in vortrefflichen Abbildungen diese Lagerungen veranschaulicht und verwendet. Aber in der Kristallographie hat diese Annahme sich nicht bewährt. Nun hat Otto Lueger[3]) bei dieser Theorie die engste Lagerung gleicher Kugeln ohne richtige Kenntnis ihrer Zwischenräume vorausgesetzt. Ihm sind Charles S. Schlichter[4]) und L. Darapsky[5]) gefolgt, welche die Zwischenräume zwar mehr beachtet, aber nicht vollständig erkannt haben.

I. Einfachste ebene Lagerung gleicher Kreise.

1. Einfachstens gelagerte gleiche Kreise in einem Quadrat. In dem Quadrat Fig. 1, Tafel I, dessen Seitenlänge l ist, liegt in jeder den Seiten parallelen Reihe die Anzahl n der sich berührenden gleichen Kreise vom Durchmesser d. Jeder nicht an einer Seite des Quadrats liegende Kreis wird in den Endpunkten zweier rechtwinkliger Durchmesser von vier Kreisen berührt. Die Quadrate, deren Eckpunkte die Mittelpunkte

[1]) R. Hooke, Micrographia 1667, S. 85.

[2]) W. H. Wollaston, On the elementary Particles of certain Crystals, Philosophical Transactions 1813, S. 51.

[3]) O. Lueger, 1. Theorie der Bewegung des Grundwassers, 1883. 2. Die Wasserversorgung der Städte, I. Heft, S. 123, 1890, III. Heft, S. 419, 1890.

[4]) Ch. S. Schlichter, Theoretical Investigation of the motion of groud waters. United States Geological Survey, Part. II, S. 295, 1897 bis 1898.

[5]) L. Darapky, Filtergeometrie. Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 60, S. 170, 1912.

vier nachbarlicher Kreise sind und deren Seitenlänge also gleich d ist, nennen wir Lagerquadrate. Denken wir uns die zu den Seiten des Quadrats parallelen durch die Mittelpunkte der Kreise gehenden Geraden gezogen, in denen also jene rechtwinkligen Durchmesser liegen, dann entsteht ein quadratisches Gitter, dessen Kreuzungspunkte die Mittelpunkte der Kreise sind. Hiernach kann die einfachste Lagerung der Kreise auch als quadratische Lagerung definiert werden.

Da $\mathfrak{l} = n d$ ist, so folgt der Gesamtinhalt der n^2 Kreise

$$\mathfrak{K} = n^2 \left(\frac{d}{2}\right)^2 \pi = \left(\frac{\mathfrak{l}}{2}\right)^2 \pi,$$

der also gleich dem Inhalt des dem Quadrat in Fig. 2 eingeschriebenen Kreises ist. Demnach ergibt sich der Gesamtinhalt aller Zwischenflächen

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{l}^2 - \left(\frac{\mathfrak{l}}{2}\right)^2 \pi = \mathfrak{l}^2 \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = 0{,}2146\, \mathfrak{l}^2 \quad \ldots \ldots \quad (1),$$

der mithin gleich ist dem Gesamtinhalt der vier gleichen von den Seiten des Quadrats und dem eingeschriebenen Kreis begrenzten Zwickelflächen. Die vier um die Ecken des Quadrats beschriebenen Viertelkreise umgrenzen konkav eine Fläche, deren Inhalt gleich dem Gesamtinhalt aller Zwischenflächen ist. Diese Fläche nennen wir, weil wie hier auch fernerhin in anderen derartigen Fällen nur konkav umgrenzende Kreisbögen vorkommen, einfach ein Bogenquadrat. Die Zwischenflächen in den Lagerquadraten sind also auch Bogenquadrate.

Sonach folgt:

Satz 1. Bei der einfachsten Lagerung gleicher Kreise in einem Quadrat ist der Gesamtinhalt der Kreise und der Gesamtinhalt aller Zwischenflächen unabhängig von der Anzahl und Größe der Kreise; jener ist gleich dem Inhalt des dem Quadrat eingeschriebenen Kreises, dieser gleich dem Gesamtinhalt der vier Zwickelflächen und gleich dem Inhalt des Bogenquadrats in dem Quadrat.

Dies gilt auch für unendlich viele unendlich kleine Kreise.

2. Einfachstens gelagerte gleiche Kreise in einem Rechteck. Nehmen wir an, daß in einem Rechteck von den Seitenlängen $\mathfrak{l}_1$, $\mathfrak{l}_2$ in den zu den Seiten parallelen Reihen beziehlich die Anzahlen n_1, n_2 Kreise vom Durchmesser d liegen; dann ist $\mathfrak{l}_1 = n_1 d$, $\mathfrak{l}_2 = n_2 d$, und demnach der Gesamtinhalt der Anzahl $n_1 n_2$ Kreise

$$\mathfrak{K} = n_1 n_2 \left(\frac{d}{2}\right)^2 \pi = {}^1/_4\, \mathfrak{l}_1 \mathfrak{l}_2 \pi;$$

mithin gleich dem Inhalt der dem Rechteck eingeschriebenen Ellipse, deren Achsen gleich $\mathfrak{l}_1$, $\mathfrak{l}_2$ und parallel zu den Seiten desselben sind.

Hiernach ergibt sich der Gesamtinhalt aller Zwischenflächen

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{l}_1 \mathfrak{l}_2 - \frac{\mathfrak{l}_1 \mathfrak{l}_2}{4} \pi = \mathfrak{l}_1 \mathfrak{l}_1 \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = 0{,}2146\, \mathfrak{l}_1 \mathfrak{l}_2 \quad \ldots \ldots \quad (2),$$

der also gleich dem Gesamtinhalt der vier Zwickelflächen ist, die von den Seiten des Rechtecks und von der eingeschriebenen Ellipse begrenzt werden.

Wenn diese vier Zwickelflächen mit ihren rechtwinkligen Ecken in den Mittelpunkt der Ellipse an ihre Achsen gelegt werden, so bilden sie eine vierspitzige, elliptisch eingebuchtete Fläche, deren Inhalt gleich dem Gesamtinhalt der Zwischenflächen ist. Sonach folgt:

Satz 2. Bei der einfachsten Lagerung gleicher Kreise in einem Rechteck ist der Gesamtinhalt der Kreise und der Gesamtinhalt aller Zwischenflächen unabhängig von der Anzahl und Größe der Kreise; jener ist gleich dem Inhalt der dem Rechteck eingeschriebenen Ellipse, deren Achsen den Seiten desselben parallel sind, dieser gleich dem Gesamtinhalt der vier Zwickelflächen und gleich dem Inhalt der vierspitzigen, elliptisch eingebuchteten Fläche in dem Rechteck.

Wenn die eine der Anzahlen n_1, n_2 unendlich groß ist, so ist es auch die andere; und dieser Satz gilt also auch für unendlich viele unendlich kleine Kreise.

Ist in dem Rechteck eine in zwei ganzzahligen Faktoren zerlegbare Anzahl $\mathfrak{m} = n_x \cdot n_y$ Kreise gegeben, wobei ein Faktor gleich 1 sein kann, dann gibt es für den Gesamtinhalt $\mathfrak{Z}$ ebenso viele Rechtecke wie die Anzahl der Zerlegungen; und falls zwei

Faktoren gleich sind, also $\mathfrak{m}$ eine Quadratzahl ist, befindet sich unter den Rechtecken ein Quadrat. Wird der eine Faktor, etwa $n_y = 1$ angenommen, so gibt es nur eine Reihe von $\mathfrak{m}$-Kreisen in dem Rechteck, dessen Seitenlängen $\mathfrak{l}_1 = \mathfrak{m}d$, $\mathfrak{l}_2 = d$ sind. Ferner ist die Anzahl der Kreise $\mathfrak{m} = \frac{\mathfrak{l}_1 \mathfrak{l}_2}{d^2}$, also umgekehrt proportional d^2.

II. Engste ebene Lagerung gleicher Kreise.

3. Ableitung der engsten Lagerungen der Kreise. Wir denken uns in Fig. 1 die Mittelpunkte der in den vier Ecken des Quadrats liegenden Kreise durch starre Quadratseiten gelenkig verbunden und das S. 34 erwähnte quadratische Gitter an sie gelenkig angeschlossen. Wird nun die untere Quadratseite als fest angenommen und die z. B. links anliegende gegen sie um einen veränderlichen Winkel gedreht, dann verwandelt sich das gelenkige Quadrat in einen Rhombus und das quadratische Gitter in ein rhombisches Gitter, dessen Kreuzungspunkte die Mittelpunkte der Kreise sind, die von einem Rhombus mit veränderlichen Seiten umschlossen werden. Wenn der von der gedrehten Quadratseite mit der festen gebildete Winkel bis 60° verkleinert wird, so entsteht die in Fig. 3 gezeichnete engste Lagerung der Kreise in einem Rhombus, dessen beide spitze Winkel also gleich 60° sind und dessen kurze Diagonale gleich den Seiten ist. Diesen besonderen Rhombus nennen wir Raute[1]).

Diese engste Lagerung der Kreise wird von einer Raute umgrenzt, und jeder nicht an deren Seiten liegende Kreis von sechs Kreisen berührt. Aus dem quadratischen Gitter ist ein rautisches Gitter entstanden, dessen Kreuzungspunkte die Mittelpunkte der Kreise sind. Demnach kann die engste Lagerung der Kreise auch als rautische Lagerung definiert werden. Die Rauten, deren vier Eckpunkte die Mittelpunkte nachbarlicher Kreise sind, nennen wir Lagerrauten. Jedes Lagerquadrat und in ihm das Bogenquadrat hat sich in eine Lagerraute und in ein Bogendreieckpaar mit einer gemeinsamen Ecke verwandelt.

4. Engstens gelagerte gleiche Kreise in einer Raute. Wir nehmen an, daß in jeder zu den Rautenseiten parallelen Reihe der sich berührenden Kreise die Anzahl n-Kreise vom Durchmesser d liegt, und ermitteln zuvörderst die dadurch bestimmte Seitenlänge l der Raute. Zu diesem Zweck und wegen späterer allgemeiner Betrachtungen ziehen wir in Fig. 4 an einen Kreis k_1 zwei parallele Tangenten t, t', und auf t ist der Berührpunkt T; ferner ziehen wir durch den Mittelpunkt M des Kreises eine Gerade, die ihn in den Punkten A, A' und die Tangenten in den Punkten Φ, Φ' schneidet. Den Durchmesser bezeichnen wir mit d_1 und den Winkel $M\Phi T$ mit φ; dann ist $\frac{1}{2}d_1 = MT = (\Phi A + \frac{1}{2} d_1) \sin\varphi$ und folglich ergibt sich die fürderhin öfters in Betracht kommende Gleichung der Strecken

$$\Phi A = \Phi' A' = \frac{1}{2} d_1 \left(\frac{1}{\sin\varphi} - 1\right).$$

Bei der beispielsweise in Fig. 4 gewählten dem Kreis k_1 umschriebenen Raute $ABCD$ ist der Winkel $\varphi = 60°$ und $\sin\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; mithin ist $\Phi A = \Phi' A' = \frac{1}{2} d_1 (\frac{2}{3}\sqrt{3} - 1)$. Da in Fig. 3 längs einer Seite l der Raute n Kreise liegen, so befindet sich als Ergänzung der Seitenlänge an dem ersten dieser Kreise die Strecke ΦA und an dem letzten die Strecke $\Phi' A'$. Der Kürze halber setzen wir

$$\varepsilon = \frac{2}{3}\sqrt{3} - 1 = 0{,}1540,$$

dann ist die Seitenlänge

$$l = dn + d\varepsilon = d(n + \varepsilon) \text{ und } d = \frac{l}{n + \varepsilon}.$$

Den Wert ε nennen wir den Ergänzwert der Seitenlänge l. Hiernach ist der Gesamtinhalt der n^2 Kreise

$$K = n^2 \left(\frac{d}{2}\right)^2 \pi = n^2 \left(\frac{l}{2}\right)^2 \frac{\pi}{(n+\varepsilon)^2} = \left(\frac{l}{2}\right)^2 \frac{\pi}{\left(1 + \frac{\varepsilon}{n}\right)^2}$$

[1]) Rhombus und Raute sind synonyme Benennungen. Die etymologische Herkunft »Raute« ist nach Grimms Wörterbuch der deutschen Sprache unbekannt, so daß die Benennung Raute als zweckmäßig für den besonderen Rhombus verwendet werden kann, der durch seine Seitenlänge allein bestimmt ist, und sich dadurch von allen Rhomben unterscheidet.

und für $n = \infty$ ist der Grenzwert $K_\infty = \left(\frac{l}{2}\right)^2 \pi$, also gleich dem Inhalt des Kreises vom Durchmesser l. Der Inhalt der Raute ist $R = l^2 \sin 60^0 = \frac{1}{2} l^2 \sqrt{3}$ und demnach der Gesamtinhalt aller Zwischenflächen

$$Z = R - K = \frac{1}{2} l^2 \left[\sqrt{3} - \frac{\pi}{2\left(1 + \frac{\varepsilon}{n}\right)^2}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Für $n = \infty$ ist der Grenzwert $Z_\infty = \frac{1}{2} l^2 (\sqrt{3} - \frac{1}{2}\pi) = 0{,}0806 \cdot l^2$. Beschreiben wir, wie in Fig. 4a um die Eckpunkte A, B, C, D der verkleinerte Raute Kreisbögen mit dem Radius gleich der halben Seitenlänge, die $\frac{1}{2} l$ entspricht, dann umgrenzen sie ein Bogendreieckpaar, dessen Inhalt ist, weil die vier Kreisbögen zusammen einen Kreis bilden, gleich dem Grenzwert Z_∞. Sonach folgt:

Satz 3. Der Gesamtinhalt aller Zwischenflächen bei den in einer Raute engstens gelagerten gleichen Kreisen verkleinert sich mit der Vergrößerung ihrer Anzahl bis zu einem Grenzwert für unendlich viele unendlich kleine Kreise, der gleich dem Inhalt des Bogendreieckpaares in der Raute ist.

Wenn die Anzahl n so groß ist, daß der Ergänzwert $\varepsilon = 0{,}1540$ vernachlässigt werden kann, dann ist der Gesamtwert Z angenähert gleich dem Grenzwert Z_∞.

Ferner ergibt sich das Verhältnis des Gesamtinhaltes der Zwischenflächen zu dem Inhalt der Raute

$$V = \frac{Z}{R} = 1 - \frac{K}{R} = 1 - \frac{\pi\sqrt{3}}{6\left(1 + \frac{\varepsilon}{n}\right)^2},$$

und für $n = \infty$ der Grenzwert $V_\infty = 1 - \frac{1}{6}\pi\sqrt{3} = 0{,}0931$.

5. Engstens gelagerte gleiche Kreise in einem rautischen Parallelogramm. Wir nennen ein Parallelogramm, dessen beiden spitzen Winkel gleich 60^0 sind, ein rautisches Parallelogramm; bezeichnen seine Seitenlängen mit l_1, l_2 und seinen Inhalt mit P. Ferner nehmen wir an, daß in jeder zu den Seiten parallelen Reihe bezieblich die Anzahlen n_1, n_2 Kreise liegen, deren Durchmesser d ist. Da wie bei der Raute der Ergänzwert $\varepsilon = \frac{2}{3}\sqrt{3} - 1$ ist, so folgt:

$$l_1 = d(n_1 + \varepsilon), \quad l_2 = d(n_2 + \varepsilon), \quad \text{und} \quad d = \frac{l_1}{n_1 + \varepsilon} = \frac{l_2}{n_2 + \varepsilon};$$

mithin der Gesamtinhalt der $n_1 n_2$ Kreise

$$K = n_1 n_2 \left(\frac{d}{2}\right)^2 \pi = \frac{l_1 l_2 \pi}{4\left(1 + \frac{\varepsilon}{n_1}\right)\left(1 + \frac{\varepsilon}{n_2}\right)};$$

und für $n_1 = n_2 = \infty$ ist der Grenzwert $K_\infty = \frac{1}{4} l_1 l_2 \pi$, also gleich dem Inhalt einer Ellipse, deren Achsen gleich l_1, l_2 sind. Da der Inhalt des rautischen Parallelogramms $P = l_1 l_2 \sin 60^0 = \frac{1}{2} l_1 l_2 \sqrt{3}$ ist, so folgt der Gesamtinhalt aller Zwischenflächen

$$Z = P - K = \frac{1}{2} l_1 l_2 \left[\sqrt{3} - \frac{\pi}{2\left(1 + \frac{\varepsilon}{n_1}\right)\left(1 + \frac{\varepsilon}{n_2}\right)}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

und für $n_1 = n_2 = \infty$ der Grenzwert $Z_\infty = \frac{1}{2} l_1 l_2 \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}0806 \cdot l_1 l_2$. Sonach ergibt sich:

Satz 4. Der Gesamtinhalt aller Zwischenflächen bei den in einem rautischen Parallelogramm engstens gelagerten gleichen Kreisen verkleinert sich mit der Vergrößerung ihrer Anzahl bis zu dem Grenzwert Z_∞ für unendlich viele unendlich kleine Kreise.

Ferner ist das Verhältnis

$$V = \frac{Z}{P} = 1 - \frac{K}{P} = 1 - \frac{\pi\sqrt{3}}{6\left(1 + \frac{\varepsilon}{n_1}\right)\left(1 + \frac{\varepsilon}{n_2}\right)},$$

und für $n_1 = n_2 = \infty$ der Grenzwert $V_\infty = 1 - \frac{1}{6}\pi\sqrt{3} = 0{,}0931$, also derselbe wie bei der Raute.

Ist in dem rautischen Parallelogramm eine in zwei ganzzahligen Faktoren zerlegbare Anzahl $\mathfrak{m} = n_x \cdot n_y$ Kreise gegeben, wobei ein Faktor gleich 1 sein kann, dann gibt es für den Gesamtinhalt Z ebenso viele rautische Parallelogramme wie die Anzahl der Zerlegungen, und darunter auch eine Raute, wenn $\mathfrak{m}$ eine Quadratzahl ist.

6. Engstens gelagerte gleiche Kreise in einem gleichseitigen Dreieck. In Fig. 3 bilden die beiden gestrichelt angedeuteten Ecken und die untere linke Ecke der Raute ein gleichseitiges Dreieck. Längs jeder seiner Seiten liegt eine Anzahl n gleicher Kreise vom Durchmesser d. Um die Seitenlänge l zu bestimmen, ist in Fig. 5 ein gleichseitiges Dreieck ABC mit den eingeschriebenen Kreis k_1 gezeichnet. Wir ziehen durch seinen Mittelpunkt M zu der Seite AB die Parallele, welche die beiden anderen Seiten in den Punkten Φ, Φ' und den Kreis in den Punkten $\varDelta$, $\varDelta'$ schneidet, und fällen auf AB die Senkrechten $\Phi\Sigma$, $\Phi'\Sigma'$. Dann ist, indem wir den Durchmesser des Kreises k_1 mit d_1 bezeichnen, nach Seite 35 die Strecke

$$\Phi\varDelta = \Phi'\varDelta' = {}^1/_2\, d_1 \left(\frac{1}{\sin 60} - 1\right) = \frac{d_1}{2}\left({}^2/_3\sqrt{3} - 1\right).$$

Ferner ist die Strecke

$$\varDelta\Sigma = \Phi\Sigma \cot 60 = \frac{d_1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}\,;$$

mithin

$$\Phi\varDelta + \varDelta\Sigma = \frac{d_1}{2}(\sqrt{3} - 1) = \Phi'\varDelta' + B\Sigma'$$

und $\zeta = \sqrt{3} - 1 = 0{,}7320$ gesetzt der Ergänzwert.

Da nun längs jeder Seite des gleichseitigen Dreiecks in Fig. 3 die Anzahl n Kugeln liegen, so ist die Seitenlänge

$$l = dn + d(\sqrt{3} - 1) = d(n + \zeta) \text{ und } d = \frac{l}{n + \zeta},$$

und die Anzahl der Kreise in dem gleichseitigen Dreieck gleich der Summe ${}^1/_2\, n(n+1)$ der arithmetrischen Reihe 1, 2, 3, . . . n. Hiernach ergibt sich der Gesamtinhalt dieser Kreise

$$K = {}^1/_2\, n(n+1)\left(\frac{d}{2}\right)^2 \pi = {}^1/_2\, n(n+1)\left(\frac{l}{2}\right)^2 \frac{\pi}{(n+\zeta)^2} = {}^1/_2\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(\frac{l}{2}\right)^2 \frac{\pi}{\left(1 + \frac{\zeta}{n}\right)^2}\,;$$

und für $n = \infty$ der Grenzwert $K_\infty = {}^1/_2\left(\frac{l}{2}\right)^2 \pi$, also gleich dem Inhalt des Halbkreises von Durchmesser l.

Ferner ist der Inhalt des gleichseitigen Dreiecks $D = \left(\frac{l}{2}\right)^2 \sqrt{3}$; mithin der Gesamtinhalt aller Zwischenflächen in dem gleichseitigen Dreieck

$$Z = D - K = \left(\frac{l}{2}\right)^2 \left[\sqrt{3} - \frac{n(n+1)\pi}{2(n+\zeta)^2}\right] = \left(\frac{l}{2}\right)^2 \left[\sqrt{3} - \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\pi}{2\left(1 + \frac{\zeta}{n}\right)^2}\right] \quad . \quad . \quad (5)$$

und für $n = \infty$ der Grenzwert $Z_\infty = \left(\frac{l}{2}\right)^2 (\sqrt{3} - {}^1/_2\,\pi)$.

Beschreiben wir in Fig. 5 a um die Eckpunkte A, B, C des verkleinerten gleichseitigen Dreiecks Kreisbögen mit dem Radius gleich der halben Seitenlänge, die ${}^1/_2\, l$ entspricht, dann umgrenzen sie ein Bogendreieck, dessen Inhalt ist, weil die drei Kreisbögen zusammen einen Halbkreis bilden, gleich dem Grenzwert Z_∞. Sonach folgt:

Satz 5. Der Gesamtinhalt aller Zwischenflächen bei den in einem gleichseitigen Dreieck engstens gelagerten gleichen Kreisen verkleinert sich mit der Vergrößerung ihrer Anzahl bis zu einem Grenzwert für unendlich viele unendlich kleine Kreise, der gleich dem Inhalt des Bogendreiecks in dem gleichseitigen Dreieck ist.

Ferner ist das Verhältnis

$$V = \frac{Z}{D} = 1 - \frac{K}{D} = 1 - \frac{n(n+1)\pi\sqrt{3}}{6(n+\zeta)^2} = 1 - \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\pi\sqrt{3}}{6\left(1 + \frac{\zeta}{n}\right)^2},$$

und für $n = \infty$ ist der Grenzwert $V_\infty = 1 - {}^1/_6\,\pi\sqrt{3}$, also derselbe wie bei der Raute und dem rautischen Parallelogramm.

III. Einfachste Lagerung gleicher Kugeln.

7. Einfachstens gelagerte gleiche Kugeln in einem Würfel. In dem Fig. 6 achsonometrisch dargestellten Würfel von der Kantenlänge $\mathfrak{l}$ liegt in jeder zu den Kanten parallelen Reihe der sich berührenden Kugeln die Anzahl n Kugeln vom Durchmesser d. Jede nicht an einer Seite des Würfels liegende Kugel wird in den Endpunkten dreier rechtwinkliger zu den Kanten paralleler Durchmesser von sechs Kugeln berührt. Die Würfel, deren Eckpunkte die Mittelpunkte acht nachbarlicher Kugeln sind, und deren Kantenlänge also gleich d ist, nennen wir Lagerwürfel. Denken wir uns die zu den Kanten parallelen durch die Mittelpunkte der Kugeln gehenden Geraden gezogen, in denen also jene drei rechtwinkligen Durchmesser liegen; dann entsteht ein kubisches Gitter, dessen Kreuzungspunkte die Mittelpunkte der Kugeln sind. Hiernach kann die einfachste Lagerung der Kugel auch als eine kubische Lagerung definiert werden.

Da die Kantenlänge $\mathfrak{l} = nd$ ist, so folgt der Gesamtinhalt der Kugeln

$$\mathfrak{K} = {}^1/_6\, n^3 d^3 \pi = {}^1/_6\, \mathfrak{l}^3 \pi ,$$

der also gleich dem Inhalt der dem Würfel eingeschriebenen Kugel ist.

Demnach ergibt sich der Gesamtinhalt aller Zwischenräume

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{l}^3 - {}^1/_6\, \mathfrak{l}^3 \pi = \mathfrak{l}^3 (1 - {}^1/_6\, \pi) = 0{,}4764 \cdot \mathfrak{l}^3 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (6),$$

der folglich gleich ist dem Gesamtinhalt der acht von den Seiten des Würfels und der eingeschriebenen Kugel umgrenzten Zwickelräume. Zur Veranschaulichung ist in Fig. 6a die Hohlform eines Zwickelraumes achsonometrisch dargestellt, der sich in einem Achtelwürfel von der Kantenlänge ${}^1/_2\, \mathfrak{l}$ befindet. Seine Ecke C entspricht der nicht sichtbaren Ecke des Würfels in Fig. 6 und sein Eckpunkt M dem Mittelpunkt desselben. Die Fußpunkte M_1, M_2, M_3 der auf die betreffenden Seiten des Achtelwürfels gefällten Senkrechten sind zu ihm gehörende Eckpunkte und die Ecken des konkaven sphärischen Dreiecks, welches auf der eingeschriebenen Kugel liegt.

In Fig. 7 ist der Würfel verkleinert mit den in seinen Ecken liegenden acht Achtelkugeln von dem Radius ${}^1/_2\, \mathfrak{l}$ schrägbildlich dargestellt. Der Zwischenraum wird von acht konkaven rechtwinkligen sphärischen Dreiecken der Achtelkugeln und den sechs in den Würfelseiten liegenden Bogenquadraten umgrenzt. Diesen Zwischenraum nennen wir einen halbeingebeulten Würfelhohlraum, und sein Inhalt ist gleich dem Gesamtinhalt $\mathfrak{Z}$. In jedem Lagerwürfel ist der Zwischenraum auch ein halbeingebeulter Würfelhohlraum. Sonach ergibt sich:

Satz 6. **Bei der einfachsten Lagerung gleicher Kugeln in einem Würfel ist der Gesamtinhalt der Kugeln und der Gesamtinhalt aller Zwischenräume unabhängig von der Anzahl und Größe der Kugeln; jener ist gleich dem Inhalt der dem Würfel eingeschriebenen Kugel, dieser gleich dem Gesamtinhalt der acht Zwickelräume und gleich dem Inhalt des halbeingebeulten Würfelhohlraumes in dem Würfel.**

Dies gilt auch für unendlich viele unendlich kleine Kugeln.

Der Gesamtinhalt der Anzahl n^3 Kugelflächen ist

$$\mathfrak{F} = n^3 d^2 \pi = n\, \mathfrak{l}^2 \pi = \frac{\mathfrak{l}^3}{d} \pi ;$$

also gleich dem n-fachen Inhalt eines Kreises vom Radius $\mathfrak{l}$ und umgekehrt proportional dem Durchmesser d.

8. Einfachstens gelagerte gleiche Kugeln in einem Quader. Sind $\mathfrak{l}_1$, $\mathfrak{l}_2$, $\mathfrak{l}_3$ die Kantenlängen des Quaders und n_1, n_2, n_3 die Anzahlen der in den zu den Kanten parallelen Reihen liegenden Kugeln vom Durchmesser d, dann ist der Gesamtinhalt der $n_1 n_2 n_3$ Kugel, wegen $\mathfrak{l} = n_1 d$, $\mathfrak{l}_2 = n_2 d$, $\mathfrak{l}_3 = n_3 d$,

$$\mathfrak{K} = {}^1/_6\, n_1 n_2 n_3 d^3 \pi = {}^1/_6\, \mathfrak{l}_1 \mathfrak{l}_2 \mathfrak{l}_3 \pi ;$$

also gleich dem Inhalt des dem Quader eingeschriebenen dreiachsigen Ellipsoids, dessen Achsen den Kanten parallel und gleich sind.

Ferner ist der Gesamtinhalt aller Zwischenräume

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{l}_1 \mathfrak{l}_2 \mathfrak{l}_3 (1 - {}^1/_6) \pi = 0{,}4764 \cdot \mathfrak{l}_1 \mathfrak{l}_2 \mathfrak{l}_3 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7);$$

mithin gleich dem Gesamtinhalt der acht von den Seiten des Quaders und dem dreiachsigen Ellipsoid umgrenzten Zwickelräume.

Denken wir uns in jede der acht Ecken des Quaders übereinstimmend mit seinen Kanten ein Achtelellipsoid gelegt, dann entsteht ein Zwischenraum, der von den acht

konkaven ellipsoidischen Dreiecken der Achtelellipsoide und von den sechs in den Seiten des Quaders liegen, vierspitzigen elliptisch eingebuchteten Flächen umgrenzt wird. Diesen Zwischenraum nennen wir einen ellipsoidisch halbeingebeulten Quaderhohlraum, und sein Inhalt ist gleich dem Gesamtinhalt $\mathfrak{Z}$. Sonach folgt:

Satz 7. Bei der einfachsten Lagerung gleicher Kugeln in einem Quader, ist der Gesamtinhalt der Kugeln und der Gesamtinhalt aller Zwischenflächen unabhängig von der Anzahl und Größe der Kugeln; jener ist gleich dem Inhalt des dem Quader eingeschriebenen dreiachsigen Ellipsoids, dessen Achsen zu den Kanten parallel sind, dieser ist gleich dem Gesamtinhalt der acht Zwickelräume und gleich dem Inhalt des ellipsoidisch halbeingebeulten Quaderhohlraumes in dem Quader.

Dieser Satz gilt auch wie der vorige für unendlich viele unendlich kleine Kugeln.

Ist eine in drei ganzzahligen Faktoren zerlegbare Anzahl $\mathfrak{m} = n_x \cdot n_y \cdot n_z$ Kugeln gegeben, wobei ein Faktor gleich 1 oder zwei gleich 1 sein können; dann gibt es für den Gesamtinhalt $\mathfrak{Z}$ ebenso viele Quader wie die Anzahl der Zerlegungen, und falls drei Faktoren gleich sind, also $\mathfrak{m}$ eine Kubikzahl ist, darunter einen Würfel. Wenn ein Faktor $n_z = 1$ ist so liegt eine Schicht mit der Anzahl $\mathfrak{m} = n_x \cdot n_y$ Kugeln in dem Quader von den Kantenlängen $n_x d$, $n_y d$, d, und wenn zwei Faktoren $n_y = n_z = 1$ sind, so befindet sich nur eine mit der Anzahl $\mathfrak{m} = n_x$ Kugeln in dem Quader von den Kantenlängen $\mathfrak{m}\, d$, d, d.

Es ist erwähnenswert, daß bei den Bakterien, die Sarcinen genannt werden, die Vermehrung einer Zelle nach drei rechtwinkligen Richtungen im Raum erfolgt, wobei die Mutterzelle sich in acht Tochterzellen zerlegt, deren Mittelpunkte gleichsam die Eckpunkte eines Lagerwürfels sind. Durch weitere Teilung entsteht eine Zellenkolonie, welche wie die einfachste Lagerung gleicher Kugel in einen Quader ohne Wandung gestaltet ist und einem Päckchen (Sarcina) ähnelt, von dem jene Benennung stammt[1]).

Man muß sich billig wundern, daß alle die so leicht sich ergebenden, vornehmlichen Inhalt- und Lagenbeziehungen bei der einfachsten Lagerung der Kreise und der Kugeln, wodurch die Begründung der behandelten Theorie erleichtert wird, in der Literatur nicht bekannt zu sein scheinen. Denn die besten Kenner der Geschichte der Geometrie S. Günther †, J. Tropfke und H. Wieleitner konnten hierüber keine Auskunft geben.

9. Gestaltung des Hohlraumes in der einfachsten Lagerung gleicher Kugeln. Zum leichteren Verstehen ist es zweckmäßig: ein aus acht Schussern gebildetes Modell von einem Lagerwürfel herzustellen, die mit tunlich wenigem Baumwachs so aneinander befestigt werden, daß ihre Mittelpunkte die Eckpunkte des Lagerwürfels sind, und die Durchsichten deutlich erscheinen. An dem Modell kann man durch die drei zu den Kanten des Lagerwürfels parallelen Hohlräumen und durch die sechs zu den Quadratdiagonalen parallelen Hohlräumen hindurchsehen.

In der als nicht begrenzt angenommenen einfachsten Lagerung sind diese Hohlräume charakteristisch. Einen solchen Hohlraum, der längs der Sehrichtung von bestimmten Seiten eines prismatischen Raumes umfaßt wird, nennen wir einen Stollen, den durchsichtigen Hohlraum in ihm den lichten Hohlraum, und dessen erscheinende Umgrenzung heißt die Durchsicht.

Wir betrachten den in Fig. 7 dargestellten Würfel mit seinen Hohlraum als einen in der Lagerung befindlichen Lagerwürfel und denken uns beispielsweise an der oberen und der unteren Seite mehrere Lagerwürfel mit ihren Hohlräumen aneinander gereiht, dann liegen ihre Mittelpunkte in der durch die Mitten m, m' dieser Seiten und den Mittelpunkt O gehenden mit a bezeichneten Geraden, die zu den auf diesen Seiten senkrechten Kanten parallel ist. Den so entstandenen Stollen, der sich in einem quadratischen prismatischen Raum befindet, dessen Querschnitt gleich dem Quadrat $DC'A'B'$ ist, nennen wir einen kantenparallelen Stollen und die Gerade a seine Achse. Durch jeden Lagerwürfel in der Lagerung gehen drei solcher Stollen.

In dem kantenparallelen Stollen sind die durch die Mittelpunkte der aneinander gereihten Lagerwürfel gelegten Querschnitte, Quadrate, und die in den gemeinsamen Seiten sind Bogenquadrate, die auch die Durchsicht bilden. Alle folgenden Durchschnitte werden wegen des geringen Platzes auf der Tafel ein Drittel verkleinert. Zur Unterscheidung sind die Durchschnitte der Kugel stärker als die der Lagerwürfel gezeichnet. Die Uebergänge innerhalb des Hohlraums des Stollen von einem Lagerwürfel in einem

---

[1]) Siehe z. B. Sarcina ventriculi in Franz Lafar, Technische Mykologie 1897, S. 53 u. 131.

anderen sind gestrichelt, und die Stellen, in denen dieser Hohlraum en die Hohlräume der nachbarlichen Stollen grenzt, sind punktiert gezeichnet. Ferner sind die Achsen der Stollen mit Strichen und Punkten bezeichnet.

Von dem einen der beiden axialen Längsschnitte des Stollens, die durch die Diagonalen DA', $B'C'$ gehen, ist ein Teil für zwei Lagerwürfel in Fig. 8 gezeichnet und der erste der beiden ist $ADA'D'$. Die beiden axialen Längsschnitte, welche durch die Kantenmitten 4, III' und 3, I' gehen, schneiden die Lagerwürfel in Quadraten, aber keine Kugel, und teilen den Stollen in je zwei symmetrische Hälften. In jeder der Seiten des quadratischen prismatischen Raumes befinden sich die Oeffnungen, welche eine Reihe von Bogenquadraten bilden, die Fig. 25 entspricht. Hiernach kann man sich den Hohlraum des kantenparallelen Stollens leicht vorstellen.

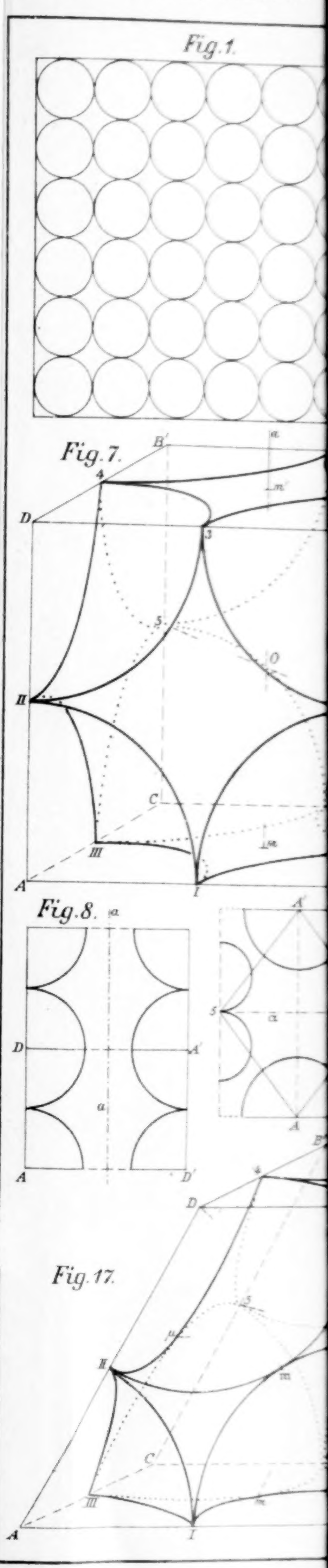
In ähnelnder Weise wie vorher denken wir uns an die gegenüberliegenden Kanten BC', $B'C$ beiderseits mehrere Lagerwürfel aneinandergereiht längs der durch die Mitten 2,5 dieser Kanten und den Mittelpunkt O gehende, mit α bezeichneten Geraden. Die auf diesen Kanten senkrechten Seitendiagonalen $B'C'$, BC sind parallel zu der Geraden α. Dadurch entsteht ein Stollen, den wir einen diagonalenparallelen Stollen nennen, und die Gerade α ist seine Achse. Durch jeden Lagerwürfel in der Lagerung gehen sechs solche Stollen.

Die in O auf der Achse α senkrechte Schnittebene schneidet den Lagerwürfel in dem Rechteck $ADA'D'$, welches der Querschnitt des prismatischen Raumes ist, in dem sich der Stollen befindet. Der zugehörige Querschnitt des Stollens ist in Fig. 9 das Rechteck $ADA'D'$ mit den Viertelkreisen. Der durch die gemeinsame Kante BC' gehende Querschnitt ist in Fig. 10 mit den beiden um B, C' beschriebenen Halbkreisen gezeichnet. In Fig. 11 sind diese Halbkreise die Projektionen von den Kugeln mit den Mittelpunkten B, C' auf den Querschnitt Fig. 9, oder es kann auf ihn auch der Querschnitt Fig. 10 gelegt werden. Das von den vier Kreisbögen gebildete Bogenrhombenpaar mit der gemeinsamen Ecke in 2 und den Ecken in den Kantenmitten II, II' ist demnach die Durchsicht des diagonalenparallelen Stollens.

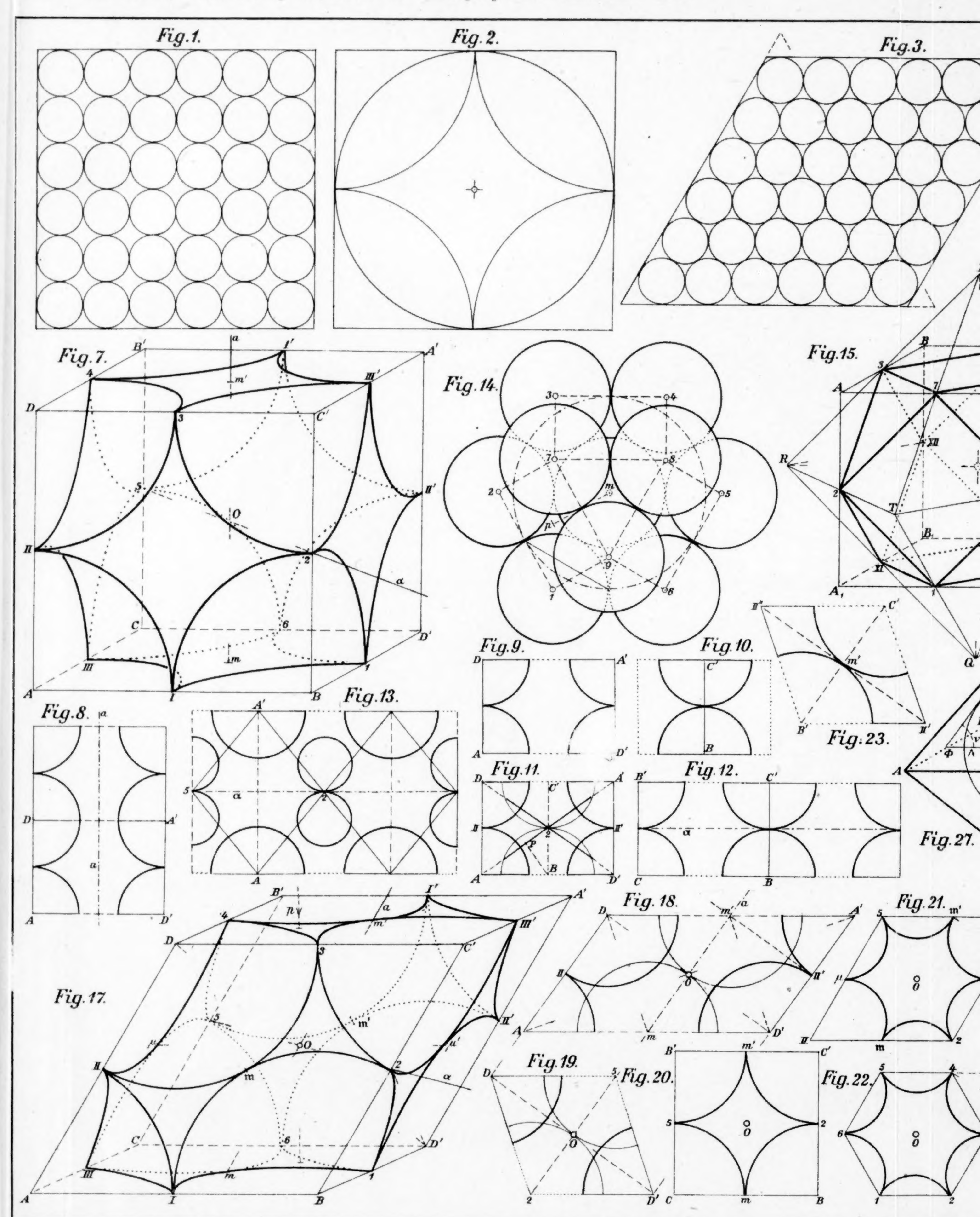
Von dem durch die Kante BC' gelegten, axialen Längsschnitt ist ein Teil für zwei Lagerwürfel in Fig. 12 gezeichnet, und der erste der beiden ist $B'C'BC$. Der auf der Kante BC' in ihrer Mitte 2 senkrechte Längsschnitt schneidet keine Kugel und teilt den Stollen in zwei symmetrische Hälften. Die beiden durch die Diagonalen AA', DD' des Lagerwürfels gehenden gleichen, axialen Längsschnitte sind besonders geartet, weil sie die Kugeln teils in Großkreisen und teils in Kleinkreisen schneiden, wie es in Fig. 11 an der Diagonalen AA', DD', die jenen Diagonalen entsprechen, ersichtlich ist. Wir betrachten nur den einen Längsschnitt, in dem die Diagonale AA' liegt. Die beiden gleichen Sehnen der Halbkreise um B, C' sind gleich dem Durchmesser der Kleinkreise, in denen die Kugeln, deren Mittelpunkte B, C' sind, geschnitten werden. Wenn d den Durchmesser der Kugeln und die Kantenlänge des Lagerwürfels bezeichnet, dann ist $AD = d$, $AD' = d\sqrt{2}$ und $AA' = d\sqrt{3}$. Indem wir auf AA' die Senkrechte BP fällen, ergibt sich wegen der ähnlichen rechtwinkligen Dreiecke $2\,PB$, $2\,BA$ der Durchmesser der Kleinkreise gleich $\frac{1}{3} d\sqrt{3} = \frac{1}{3} AA'$. Der Lagerwürfel wird in dem Rhombus $A2A'5$ geschnitten, dessen Diagonale $\overline{25} = d\sqrt{2}$ und $AA' = d\sqrt{3}$ ist. In Fig. 13 sind zwei solche Rhomben mit den Durchschnitten der Hohlräume zweier Lagerwürfel in der Ecke 2 aneinander gezeichnet, und jedem Rhombus ist ein Rechteck umschrieben.

In der schmalen Seite des prismatischen Raumes sind die Oeffnungen ebenso umformt wie die Durchschnitte in dem Längsschnitt Fig 12. In der breiten Seite bilden die Oeffnungen eine Reihe von Bogenquadraten und beiderseits daneben je eine Reihe von halben Bogenquadraten, die in einem diagonalen Streifen liegen, wie in einem solchen, der in Fig. 1 von zwei parallelen im Abstande gleich der Diagonale eines Lagerquadrats durch die Mittelpunkte zweier diagonalen Kreisreihen gehenden Geraden begrenzt wird.

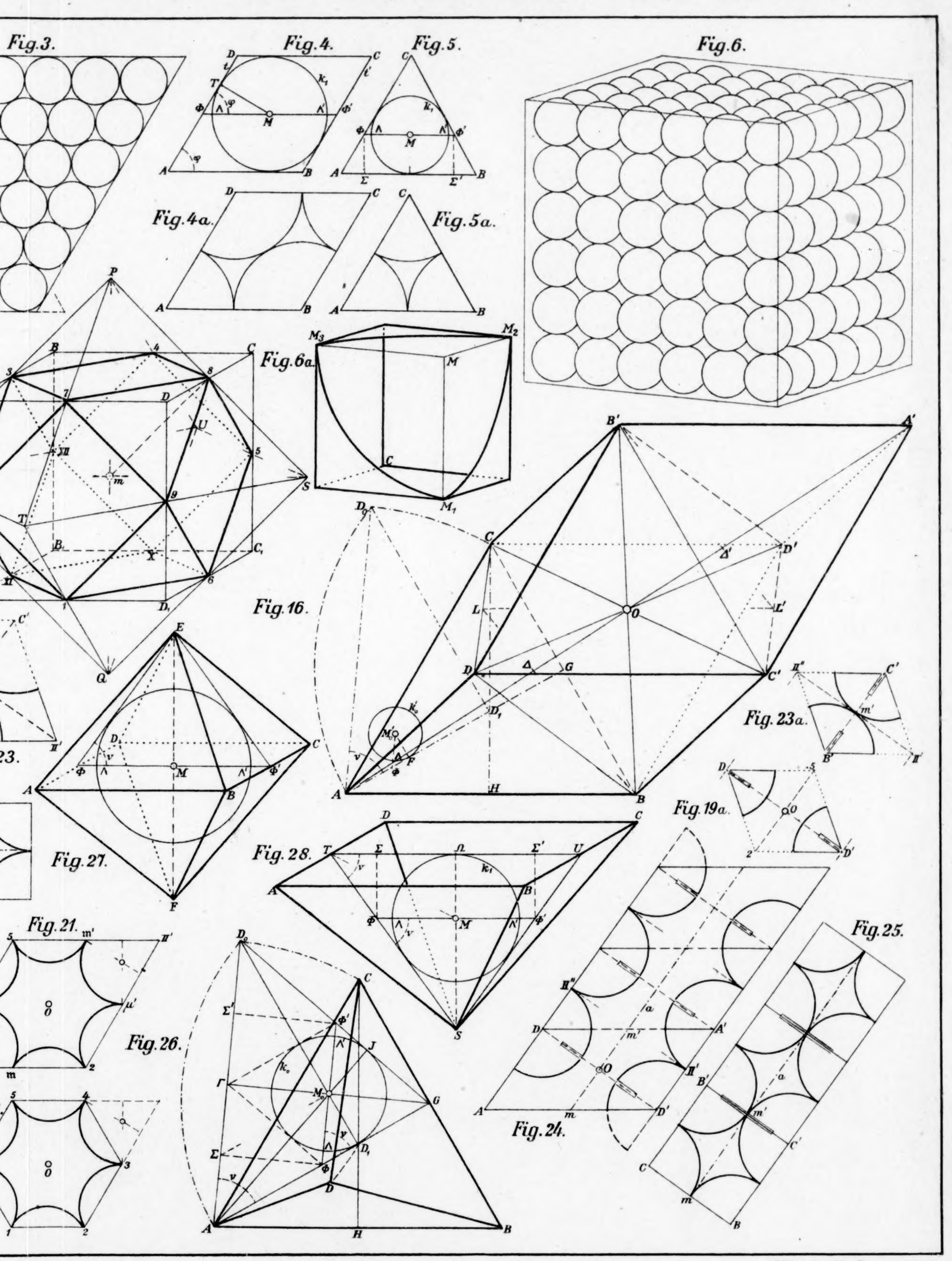
Um eine Vorstellung von der Gestalt des diagonalparallelen Stollens zu erlangen, ist es zweckmäßig, ein Modell aus Karton herzustellen: Die gezeichneten Querschnitte und Längsschnitte werden dreifach vergrößert, für etwa drei der aneinander gereihten Lagerwürfel mit Umrahmung aus Karton geschnitten, an den Stellen, wo sie sich durchschneiden, mit Einschnitten versehen und zusammengefügt, wie es später bei dem Stollen in dem engsten Lagerung S. 44 beschrieben wird.



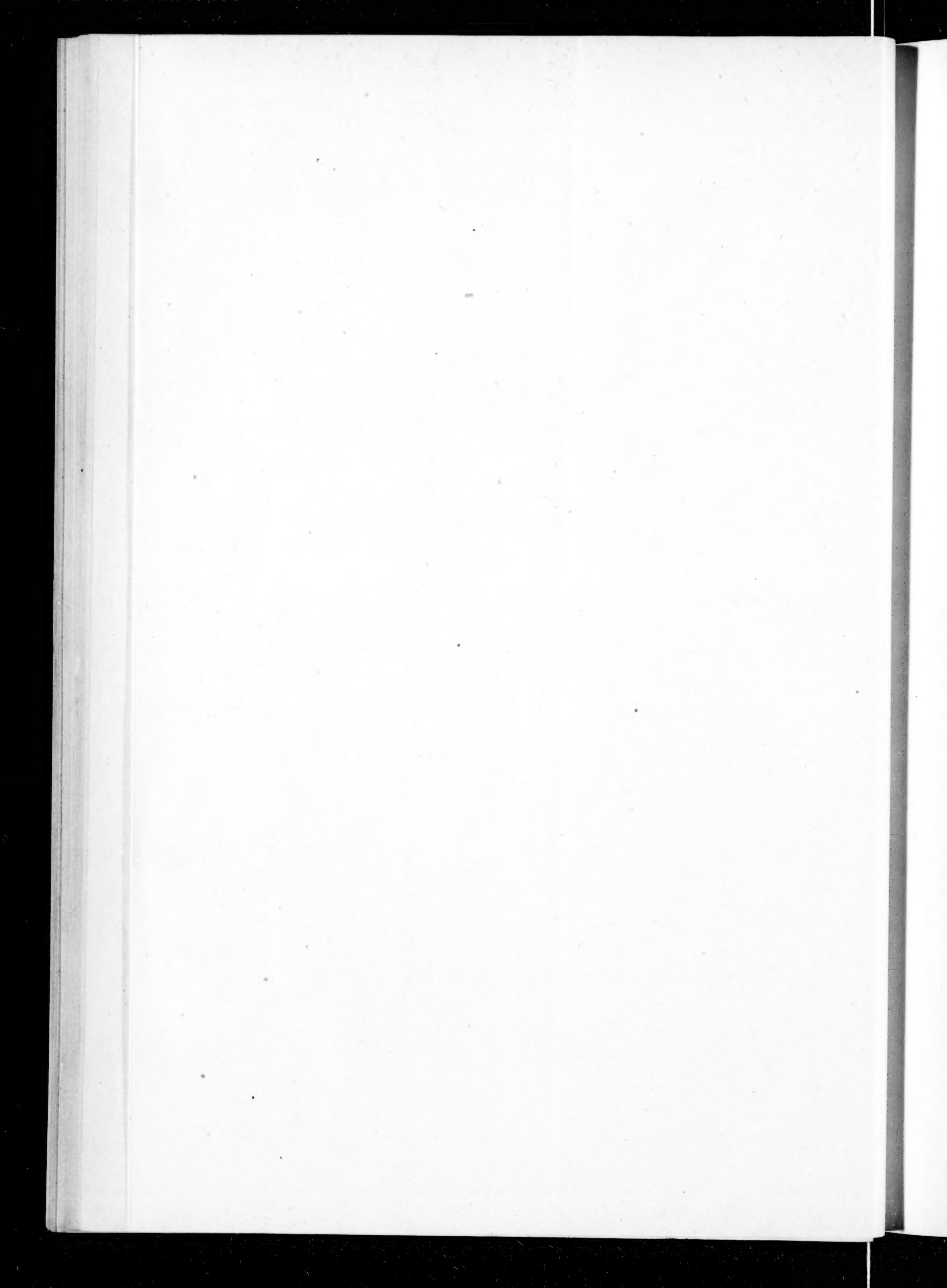
Photolithographie Dr. C. Wolf & Soh



Photolithographie Dr. C. Wolf & Sohn, München



Konstr. L. Burmester



Nach diesen Darlegungen ergibt sich:

Satz 8: In der einfachsten Lagerung gleicher Kugeln gehen durch jeden inneren Lagerwürfel drei Stollen, deren Achsen zu seinen Kanten und sechs Stollen, deren Achsen zu den Diagonalen seiner Seiten parallel sind.

Die gezeichneten Querschnitte und Längsschnitte der Stollen weisen hin auf die unendliche Mannigfaltigkeit der Durchschnitte allgemeiner durch die einfachste Lagerung gehenden Schnittebenen. Denn diese Durchschnitte bestehen aus verschiedenen Kleinkreisen nebst Großkreisen der Kugeln, wenn die betreffende Schnittebene Kugelmittelpunkte enthält. In einer durch die Mittelpunkte einer Kugelschicht gehenden Schnittebene befindet sich der allereinfachste Durchschnitt, der Fig. 1 entspricht und aus einfachstens gelagerten Kreisen besteht. Bei parallel bleibender Verlegung dieser Schnittebene bis an die Berührung der Kugelschicht entstehen gleiche sich verkleinernde Kleinkreise, die in die Berührpunkte übergehen. Je nach den Lagen einer Schnittebene ergibt sich eine Fülle mannigfaltig aus verschiedenen Kreisen gesetzmäßig geformter Muster, durchzogen von den Schnittgeraden in den Lagerwürfeln. Wird z. B. der Längsschnitt in Fig. 13 durch mehrere Stollen gehend fortgesetzt, dann entsteht ein aus Großkreisen und gleichen Kleinkreisen gebildetes Muster, welches einen ästhetischen Reiz gewährt.

IV. Engste Lagerung gleicher Kugeln.

10. Ableitung der engsten Lagerung der Kugeln. Wir nehmen an, daß in Fig. 6 die Mittelpunkte der in den acht Ecken des Würfels liegenden Kugeln durch starre Würfelkanten gelenkig verbunden sind. Von dem S. 38 erwähnten kubischen Gitter, dessen starre Geraden parallel zu den Würfelkanten sind und durch die Mittelpunkte der Kugeln gehen, befinden sich in jeder der sechs Seiten dieses gelenkigen Würfels ein quadratisches Gitter. Die starren Geraden des kubischen Gitters denken wir uns an die sechs quadratischen Gitter in deren Kreuzungspunkten gelenkig angeschlossen.

Wird nun der gelenkige Würfel so verändert, daß drei an einer Ecke befindlichen Kanten beständig gleiche sich verkleinernde Winkel φ einschließen und der Parallelismus der betreffenden Würfelkanten und Gittergeraden bestehen bleibt, dann verwandelt sich der gelenkige Würfel in ein gleichseitiges Rhomboeder und das kubische Gitter in ein gleichseitiges rhomboedrisches Gitter. Wenn nun die drei Winkel $\varphi = 60^0$ werden, dann entsteht die engste Lagerung der Kugeln. Dabei verwandelt sich der Würfel in ein besonderes gleichseitiges Rhomboeder, dessen Seiten Rauten sind, und wir nennen es Rutaeder [1]). Aus dem kubischen Gitter entsteht demgemäß ein rutaedrisches Gitter und diese engste Lagerung der Kugeln wird auch von einem Rutaeder umgrenzt. Die Rutaeder, deren Eckpunkte die Mittelpunkte je acht nachbarlicher Kugeln sind und deren Kantenlänge gleich dem Durchmesser der Kugeln ist, nennen wir Lagerrutaeder.

Zur Betrachtung der engsten Lagerung sind zuvörderst die Lagen der Kugeln zu bestimmen, die jede nicht an einer Seite des Rutaeders liegende Kugel berühren. Der Einfachheit halber verwenden wir in Fig. 14 für eine Kugel und ihren Mittelpunkt dieselbe Bezeichnung. Auf der Zeichenebene liegend wird eine Kugel m ringsum von sechs Kugeln 1, 2, 3, 4, 5, 6 berührt. An drei von den sechs vertieften Stellen legen wir die Kugeln, deren Mittelpunkte 7, 8, 9 ein gleichseitiges Dreieck bilden, und unter der Zeichenebene denken wir uns drei Kugeln an die drei vertieften Stellen gelegt, die sich unterhalb der oberen freien vertieften Stellen befinden. Demnach wird die Kugel m von zwölf Kugeln berührt. Die Mittelpunkte je drei dieser zwölf Kugeln bilden mit dem Mittelpunkt m ein reguläres Tetraeder. Ueber der Zeichenebene befinden sich vier dieser Tetraeder m 237, m 458, m 619 und m 789, ferner ebenso unten auch vier Tetraeder und diese acht Tetraeder haben also den Mittelpunkt m als gemeinsamen Eckpunkt.

An jeder Seite des Dreiecks 7 8 9 ist ein Rechteck gezeichnet, welches die senkrechte Projektion ist von einem Quadrat auf die Zeichenebene. Die Eckpunkte des Quadrats sind die Mittelpunkte vier sich berührender Kugeln. Jedes der drei Quadrate ist die Grundfläche einer Pyramide, deren Spitze m ist und deren Seiten gleichseitige Dreiecke sind. So ist z. B. in der Zeichnung eine solche Pyramide m 1279 und ihre

[1]) Da Raute lateinisch Ruta heißt, so mag die Wortbildung Rutaeder zulässig sein. Es ist zweckmäßig diese Benennung fürderhin zu verwenden, weil das Rutaeder sich wegen mancher besonderer Eigenschaft von allen allgemeinen Rhomboedern, deren Seiten Rhomben sind, unterscheidet und durch seine Kantenlänge allein bestimmt wird.

mit pm bezeichnete Höhe gleich der halben Diagonale des Quadrats 1279. Eine so bestimmte Pyramide ist eine quadratische, gleichkantige Pyramide. Jedem der drei oberen Quadrate liegt ein unteres gleiches paralleles Quadrat gegenüber, und der Abstand der beiden voneinander ist also gleich der Diagonale der Quadrate. Demnach liegen die quadratischen Grundflächen der sechs gleichkantigen quadratischen Pyramiden in den Seiten eines Würfels, dessen Kantenlänge gleich jenem Abstand ist; und die Mitten der vier Kanten, die zu je einer seiner Seiten gehören, sind die Eckpunkte einer der quadratischen Grundflächen.

Um die Lagen der Mittelpunkte der zwölf Kugeln, welche eine innere Kugel berühren, zu veranschaulichen, ist in Fig. 15 ein Würfel $A_1 B_1 C_1 D_1$ $ABCD$ und ein reguläres Oktaeder schrägbildlich dargestellt, so daß die Mitten der Kanten des Würfels und die der Kanten des Oktaeder vereint sind; wobei die rechtwinkligen Diagonalen PQ, RS, TU des Oktaeders zu den Kanten des Würfels parallel und gleich deren doppelten Länge sind. Der Würfel wird von den Seiten des Oktaeders und das Oktaeder von den Seiten des Würfels halb abgestumpft. Dadurch entsteht ein Körper, der in der Kristallographie ein Kubooktaeder genannt wird, und dessen zwölf Eckpunkte sind sonach die Mittelpunkte jener zwölf Kugeln.

Wird dem Kubooktaeder eine Kugel umschrieben, so ist z. B. ihr Radius $m8$ senkrecht auf der Oktaederkante PS und der Würfelkante CD, und die beiden sind die Diagonalen eines Rhombus $CPDS$, dessen Ebene diese Kugel in dem Eckpunkt 8 berührt. Demnach befindet sich an jeder der zwölf Ecken ein solcher Rhombus, und diese zwölf Rhomben sind die Seiten eines Rhombendodekaeders, dem die Kugel eingeschrieben ist. Da die Lagenbeziehungen der zwölf Berührpunkte auf der inneren Kugel die nämlichen sind, wie die der zwölf Mittelpunkte der sie berührenden Kugeln oder wie die der Eckpunkte des Kubooktaeders, aber verkleinert um die Hälfte, so folgt:

Satz 9. Bei der engsten Lagerung gleicher Kugeln wird jede innere Kugel von zwölf Kugeln berührt, deren zwölf Berührpunkte sind die Eckpunkte eines Kubooktaeders, die auch die Berührpunkte eines der Kugel umschriebenen Rhombendodekaeders sind.

Die vier Kugeln, deren Mittelpunkte die Eckpunkte der Grundfläche einer gleichkantigen quadratischen Pyramide sind, kommen nur an der Umgrenzung der engsten Lagerung zum Vorschein; denn in ihrem Innern befinden sich an diesen vier Kugeln beiderseits je eine sie berührende Kugel, und die Mittelpunkte dieser sechs Kugeln sind die Eckpunkte eines Oktaeders. Demnach sind die tetraedrische und die oktaedrische Lagerung gleichsam die Elemente der engsten Lagerung. Hiernach ergibt sich:

Satz 10. Die engste Lagerung gleicher Kugeln besteht aus tetraedrischen und oktaedrischen Lagerungen.

Die Bezeichnung der Eckpunkte des Kubooktaeders ist dieselbe wie in Fig. 14, und hinzugefügt sind noch die Eckpunkte des Dreiecks X XI XII, welches gegen das Dreieck 7 8 9 um 180^0 gedreht liegt. In jeder der auf zu einer der vier Würfeldiagonalen in m senkrechten Ebene liegen sechs Eckpunkte des Kubooktaeders, so z. B. in der auf B_1D senkrechten Ebene die Eckpunkte 1, 2, 3, 4, 5, 6. Demnach wird die innere Kugel vierfach von sechs Kugeln berührt, deren Mittelpunkte in je einer Ebene liegen, die zu zweien Seiten des Oktaeders parallel ist.

Die 13 so vereinten Kugeln nennen wir einen kubooktaedrischen Kugelbund, der leicht mit Baumwachs aneinander geklebten Schussern hergestellt werden kann. Jeder der sechs Eckpunkte des Oktaeders ist der Mittelpunkt einer Kugel, die je vier Kugeln des kubooktaedrischen Kugelbundes berührt; folglich befinden sich die 13 und die 6 Kugeln, also 19 Kugeln, in einem Oktaeder engstens gelagert, und längs jeder seiner Kanten liegen 3 Kugeln.

In Fig. 14 ist der durch die Berührpunkte der 6 Kreise gehende strichpunktierte Kreis ein Großkreis der Kugel, welche die 24 Kanten des Kubooktaeders in ihren Mitten berührt; und diese Mitten sind die 24 Berührpunkte, in denen sich die 12 Kugeln untereinander berühren. Diese Kugel schneidet die 12 Kugeln in je einem Kreis, dessen Durchmesser die z. B. in dem Kreis 1 eingezeichnete Sehne und also gleich dem Radius dieser Kugel ist. Demnach gibt es allgemein auf einer Kugel zwölf engstens gelagerte gleiche Kreise, deren Durchmesser gleich dem Radius der Kugel ist.

Um die Eigenart des Rutaeders zu erörtern, ist in Fig. 16 das Schrägbild eines Rutaeders gezeichnet, dessen eine Seite, die Raute $ABD'C$, in der Bildebene liegt. Dabei kann das Schrägbild AD der im Raum befindlichen, gedachten Kante AD_r in beliebiger Richtung und Länge gewählt werden, aber günstig für das Anschauen des Rutaeders. Durch die zu der Kante AD parallelen und ihr gleichen Strecken BC', CB', $D'A'$ wird das Schrägbild bestimmt. Der Höhenschnittpunkt D_1 in dem gleichseitigen Dreieck ABC ist die senkrechte Projektion von der Ecke D auf die Bildebene, und die Ebene ADD_1 ist senkrecht auf BC. Demnach sind die zu AD parallelen Kanten BC', CB' im Raum senkrecht auf BC und folglich ist $BCB'C'$ ein Quadrat. Die an den Seiten dieses Quadrats befindlichen acht gleichseitigen Dreiecke, von denen einerseits in D und anderseits in D' je vier ihrer Eckpunkte vereint sind, bilden die Seiten eines regulären Oktaeders.

Sonach besteht das Rutaeder aus dem regulären Oktaeder $BCB'C'DD'$ und den beiden regulären Tetraedern $ABCD$, $A'B'C'D'$, die wir fürderhin einfach Oktaeder und Tetraeder nennen. Die vier Diagonalen des Rutaeders schneiden sich in seinem Mittelpunkt O. Von diesen Diagonalen heißt AA' die Hauptdiagonale, welche mit den von A, A' ausgehenden Kanten gleiche Winkel bildet, und die drei aufeinander senkrechten Diagonalen BB', CC', DD' des Oktaeders werden die Nebendiagonalen des Rutaeders genannt. Die Hauptdiagonale AA' schneidet die Ebenen der Dreiecke BCD, $B'C'D'$ senkrecht in ihren Höhenschnittpunkten Δ, Δ'. Da die angedeuteten parallelen Höhen BL, $B'L'$, deren Fußpunkte L, L' die Mittelpunkte der Rauten $ACB'D$, $A'C'BD'$ sind, so ist Δ die Mitte der Strecke $A\Delta'$ und Δ' die Mitte der Strecke $A'\Delta$; mithin wird die Hauptdiagonale von Δ, Δ' in drei gleiche Teile geteilt. Jede der Nebendiagonalen ist senkrecht auf zwei gegenüberliegenden Kanten; denn es ist z. B. BB' senkrecht auf AB, $A'B'$, weil diese beiden Kanten parallel zu LL' sind.

In einem mit engstens gelagerten gleichen Kugeln gefüllten Rutaeder liegen die kubooktaedrischen Kugelbünde in der Lagerung so, daß von den vier Paaren paralleler Dreieckseiten des Kubooktaeders drei Paare zu den Seiten des Rutaeders parallel sind und ein Paar senkrecht auf der Hauptdiagonale ist, daß ferner die drei Paare paralleler Quadratseiten zu den Ebenen der Nebendiagonale parallel sind.

11. Gestaltung des Hohlraumes in der engsten Lagerung der Kugeln. Wir betrachten zuvörderst ein Lagerrutaeder, das mit seinem Hohlraum in Fig. 17 schrägbildlich dargestellt ist. Die Seiten $ABC'D$, $A'B'CD'$ sind parallel zu der Bildebene. Die Mitten der von A, A' ausgehenden Kanten bezeichnen wir mit I, II, III und I', II', III', ferner die Mitten der anderen Kanten mit 1, 2, 3, 4, 5, 6 und die Mitten der Seiten mit m, m', $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}'$, μ, μ'. In jeder der acht Ecken befindet sich ein Kugelsektor, dessen Radius gleich der halben Kantenlänge des Lagerrutaeders ist. Der Hohlraum wird von acht sphärischen Dreiecken und von den sechs in den Seiten liegenden Bogendreieckpaaren umgrenzt. Dieser Hohlraum ist trotz seiner anschaulichen Abbildung, aber in seiner eigenartigen Gestalt nicht leicht vorstellbar. Deshalb hat Schlichter [1]) ein Modell von diesem Hohlraum vermittels zwischen Kugeln gegossenen Gipses hergestellt.

Um in anderer Weise nähere Kenntnis dieses Hohlraumes zu erlangen wollen wir einige seiner durch dem Mittelpunkt O gehende, charakteristische Durchschnitte aus Fig. 17 konstruktiv entnehmen und in halber Größe übersichtlich nebeneinander liegend zeichnen. Hierbei ist aber zum leichteren Verstehen die Herstellung eines Lagerrutaeders aus Karton erforderlich. Auf den Seiten sind die Kreisbögen mit Bogendreieckpaaren zu zeichnen und jene Bezeichnungen beizuschreiben. Den Durchmesser der Kugeln, der gleich der Kantenlänge des Lagerrutaeders ist, bezeichnen wir wieder mit d, dann sind die Schnittlängen leicht zu bestimmen.

Der Schnittebene $ADA'D'$, welche in Fig. 17 durch die Hauptdiagonale AA und die Nebendiagonale DD' geht, entspricht in Fig. 18 der Durchschnitt des Hohlraumes und befindet sich in einem Parallelogramm, dessen Seiten $AD = d$, $AD' = d\sqrt{3}$ sind, und dessen auf AD, $A'D'$ senkrechte Diagonale $DD' = d\sqrt{2}$ ist. Ferner entspricht der Schnittebene $D'2D5$, welche die vier Kanten AD, $A'D'$, BC', $B'C$ senkrecht trifft, der Durchschnitt des Hohlraumes in Fig. 19, und liegt in einem Rhombus, dessen lange Diagonale auch $DD' = d\sqrt{2}$ und dessen kurze $25 = d$ ist; demnach ist seine Seitenlänge gleich $\frac{1}{2}d\sqrt{3}$.

[1]) A. a. O. S. 310.

Zu der durch die Kanten CB', $C'B$ gelegte Schnittebene gehört der Durchschnitt in Fig. 20, der ein Bogenquadrat ist, dessen Eckpunkte 2, m, 5, m' in den Mitten der Seiten des Quadrats $BC'B'C$ von der Seitenlänge d liegen. Ferner gehört zu der Schnittebene II 2 II' 5, die parallel zu zwei Seiten des Lagerrutaeders und somit auch zu einer Seite von jedem der beiden Tetraeder ist, der Durchschnitt in Fig. 21, der eine Bogensechseck ist, dessen Eckpunkte 2, 5 und μ, m, μ', m' beziehlich die Eckpunkte und die Seitenmitten der Raute von Seitenlänge d sind. Jeder der Mittelpunkte der sechs Kleinkreise ist der Höhenschnittpunkt eines gleichseitigen Dreiecks von der Seitenlänge $^1/_2 d$, wie z. B. der in dem Dreieck μ'm'II'. Von jeden dieser vier Durchschnitte des Hohlraumes in dem Lagerrutaeder gibt es drei solche in ihm.

Der auf der Hauptdiagonale AA' in O senkrechte Schnittebene entspricht in Fig. 22 ein Bogensechseck, dessen Eckpunkte die Mitten der nicht von A, A' ausgehenden Kanten sind. Dieses Bogensechseck ist dem in Fig. 21 kongruent, und da die Hauptdiagonale auf zwei Tetraederseiten senkrecht ist, so folgt: Der Hohlraum in dem Lagerrutaeder wird von den vier durch seinen Mittelpunkt gehenden, zu den Tetraederseiten parallelen Schnittebenen in kongruenten Bogensechsecken geschnitten.

Denken wir uns an die obere und die untere Seite des Lagerrutaeders mehrere Lagerrutaeder mit ihren Hohlräumen aneinander gereiht, dann entsteht ein kantenparalleler Stollen, dessen Achse a durch die Mitten m', m jener Seiten und dem Mittelpunkt O geht. Dieser Stollen befindet sich in einem prismatischen Raum, dessen auf der Achse senkrechter Querschnitt der Rhombus in Fig. 19 ist. Werden die acht Kugeln, die wir der Einfachheit halber ebenso wie ihre Mittelpunkte bezeichnen, auf die Rhombusebene senkrecht projiziert, so sind innerhalb des Hohlraumes die um D und D' beschriebenen Kreisbögen beziehlich die Projektionen von den Kugelpaaren AD und $A'D'$, wobei insonderheit die Projektionen der Kugeln D, D' mit ihren Durchschnitten zusammenfallen. Ferner sind die um 2 und 5 beschriebenen, sich in O berührenden Kreisbögen beziehlich die Projektionen von den Kugelpaaren BC' und $B'C$. Demnach ist das Bogendreieckpaar mit dem gemeinsamen Eckpunkt O die Durchsicht des kantenparallelen Stollens. Die von O weggewendeten Kreisbögen sind länger als die beiden anderen Kreisbögen; mithin ist dieses Bogendreieckpaar verschieden von den in den Seiten des Lagerrutaeders liegenden Bogendreieckpaaren.

Wir legen noch durch die Mitte m' der gemeinsamen Seite zweier Lagerrutaeder einen Querschnitt des Stollens wie in Fig. 18 gestrichelt angedeutet ist, dann entsteht der wegen des Platzes abseits in Fig. 23 gezeichnete Rhombus II' B'II'' C' der dem Rhombus in Fig. 19 kongruent ist, und die um B', C' beschriebenen Kreisbögen sind die Schnitte in den Kugeln B', C'. In Fig. 19a und 23a sind diese beiden Rhomben $D\,2\,D'\,5$ und II''C'II'B' mit den zugehörigen Querschnitten des Hohlraums in ein Drittel Größe gezeichnet; ferner sind in Fig. 24 und Fig. 25 die durch drei aneinander gereihte Lagerrutaeder gehende Längsschnitte der beiden senkrechten, achsialen Schnittebenen $ADA'D'$, $BC'B'C$ des Stollens veranschaulicht.

Um eine Vorstellung von der Gestalt des Hohlraums dieses Stollens zu erlangen ist ein Modell erforderlich, welches leicht aus Karton hergestellt werden kann. Jene beiden Längsschnitte $ADA'D'$, $BC'B'C$ werden mit Umrahmung aus dünnem Karton geschnitten, und bei dem letzteren so, daß die Halbkreise an den Stellen ihrer Berührung auf der Achse a zusammenhängend bleiben. Ferner werden auch die Kreissektoren in jenen beiden Rhomben paarweise aus Karton geschnitten. Die Stellen, wo sich die ausgeschnittenen Kartonblätter durchschneiden, werden mit Einschnitten versehen, von denen je einer zum Einschieben ineinander bestimmt ist. Die Kreissektoren D, D' werden paarweise mit ihren Einschnitten in die des Längsschnittblattes $AD'DA'$ eingefügt und senkrecht auf ihm mit Baumwachs befestigt. Ebenso die Kreissektoren $B'\,C'$ auf dem Längsschnittblatt $BC'B'C$. Sodann werden diese beiden Längschnittblätter mit den Einschnitten in ihre Umrahmungen längs der Achse a eingesetzt, und senkrecht aufeinander befestigt, ferner noch drei Seiten des prismatischen Raumes angefügt, in denen die Oeffnungen aneinander gereihte Bogendreieckpaare sind, welche die Uebergänge in die Hohlräume der nachbarlichen Stollen bilden. Die vierte Seite bleibt offen für das Hineinschauen.

Vermittels dieses Modelles erlangen wir eine Vorstellung von dem Hohlraum des kantenparallelen Stollens und seinen Einzelheiten. Wird das Modell in der Achsenrichtung gesehen, dann erscheint die Durchsicht, die ein Bogendreieckpaar wie in Fig. 19 ist. An diesem Modell kann man mehr erschauen und mehr verstehen als an jenem verkörperten Hohlraum aus Gips. Denn den auf ihm liegenden konkaven sphärischen Dreiecken ent-

sprechen im Modell-Hohlraum konvexe Kugelgewölbe, die von Kartonschnittkreisen bestimmt werden.

Nach der erhaltenen Kenntnis dieses Stollens verwenden wir zur weiteren Untersuchung der engsten Lagerung ein Modell, welches aus acht Schussern besteht, deren Mittelpunkt die Eckpunkte eines Lagerrutaeders sind, und mit Baumwachs ebenso aneinander befestigt werden, wie es in Art. 9 für den Lagerwürfel beschrieben ist. An dem Modell kann außer in den drei zu je vier Kanten parallelen Richtungen, in drei zu den kurzen Rautendiagonalen parallelen Richtungen hindurchsehen, und in jeder ist die Durchsicht auch ein Bogendreieckpaar; aber neben diesem befindet sich noch beiderseits je ein einzelnes Bogendreieck, das jedoch als zu der Durchsicht des nachbarlichen Lagerrutaeders gehörend zu betrachten ist. In den Richtungen der langen Rautendiagonalen gibt es keine Durchsicht. **Hiernach gehen durch ein Lagerrutaeder die drei kantenparallele Stollen und diese drei diagonalenparallelen Stollen.** Man kann zwar noch in senkrechter Richtung zu den Seiten des Lagerrutaeders durch das Modell hindurchsehen, diese Durchsichten kommen aber nicht in Betracht, weil sie durch je eine Kugel in den nachbarlichen Lagerrutaedern verdeckt werden.

In Fig. 17 ist die Achse mm' jenes kantenparallelen Stollens auch parallel zu den Tetraederkanten AD, $A'D'$; folglich ist jede Achse der kantenparallelen Stollen parallel zu den drei Tetraederkanten, die von den Ecken A oder A' ausgehen. Da die kubooktaedrischen Kugelbünde in einem Rutaeder gleichartig gelagert sind, so gilt das auch im einzelnen von dem Oktaeder und den beiden Tetraedern in ihm. Betrachten wir in dem Lagerrutaeder nur das eine Tetraeder $ABCD$; dann sind seine Kanten BC, CD, DB auch kurze Rautendiagonalen und parallel zu den Achsen der drei diagonalenparallelen Stollen, die also infolge der gleichartig gelagerten kubooktaedrischen Kugelbünde gleich den drei kantenparallelen Stollen sind. Diese Folgerung ist überraschend, weil ein diagonalenparalleler und ein kantenparalleler Stollen in bezug auf das Lagerrutaeder wesentlich verschieden liegen, weil ferner die Achse des ersteren durch die Mitten zweier gegenüberliegenden Seiten und die Achse des letzteren durch die Mitten zweier gegenüberliegenden Kanten des Lagerrutaeders gehen. Deshalb wird es zur Aufklärung nötig sein, daß wir einen diagonalparallelen Stollen noch eingehend betrachten.

Denken wir uns in Fig. 17 an den Kanten CB', BC' längs der durch ihre Mitten 5, 2 gehenden, mit α bezeichneten Geraden, die zu den kurzen Rautendiagonalen BC, $B'C'$ parallel ist, beiderseits mehrere Lagerrutaeder mit ihren Hohlräumen aneinandergereiht; dann entsteht ein diagonalenparalleler Stollen, dessen Achse die Gerade α, und senkrecht auf der Schnittebene $ADA'D'$ ist. Ihrem Durchschnitt entspricht das Parallelogramm in Fig. 18, und die um dessen Eckpunkte A, D, A', D' beschriebenen Kreisbögen sind dann als die Durchschnitte durch die vier Kugeln A, D, A', D' zu betrachten. Ferner sind die um m, m' beschriebenen, sich in O berührenden Halbkreise in Hinsicht auf Fig. 17 die senkrechten Projektionen von den Kugelpaaren mit den Mittelpunkten B, C und B', C'. Demnach ist das in Fig. 18 von den Kreisbögen gebildete Bogendreieckpaar mit der gemeinsamen Ecke O die Durchsicht des diagonalenparallelen Stollens, und die an den Seitenmitten II, II' entstandenen Bogendreiecke sind die vorher an dem Modell betrachteten. Der gestrichelt angedeutete Rhombus $DmD'm'$ ist dem Rhombus $D2D'5$ in Fig. 19 kongruent. Das Bogendreieckpaar mit der gemeinsamen Ecke O in dem Rhombus $DmD'm'$ ist demnach die Durchsicht des diagonalenparallelen Stollens und gleich der Durchsicht des kantenparallelen. Hiernach ist der Rhombus $mDm'D'$ der in O auf der Achse α senkrechte Querschnitt des prismatischen Raumes für den diagonalenparallelen Stollen gleich dem für den kantenparallelen. Legen wir noch in Fig. 17 durch die gemeinsame Kante BC' der beiden Lagerrutaeder einen auf der Ache α senkrechten Querschnitt, dann werden die Kugeln mit den Mittelpunkten B, C' in Kreisbögen geschnitten, die sich in der Kantenmitte 2 berühren, und dieser Querschnitt ist gleich dem in Fig. 23. Da auch die Abstände Om', $O2$ der beiden betrachteten Querschnitte in den beiden Stollen gleich sind und demnach in ihren Einzelheiten übereinstimmen, so gelangen wir, die vorherige überraschende Folgerung bestätigend, zu dem Ergebnis:

Satz 11. **In der engsten Lagerung gleicher Kugeln gehen durch jedes innere Lagerrutaeder sechs gleiche Stollen, deren Achsen zu den Kanten jedes der beiden ihm angehörigen Tetraeder parallel sind.**

An der Achse eines Stollens liegen zwei symmetrische Hälften seines Hohlraumes, und in dem lichten Hohlraum ist es möglich, daß die Strömung des Wassers geradlinig

längs der Achse erfolge. Zur näheren Kenntnis der Ausbuchtungen des Hohlraumes kann man durch ihn mehrere Querschnitte legen. So z. B. zwischen den beiden auf der Achse a in O und m' senkrechten Querschnitten, die in Fig. 19 und 23 gezeichnet sind und die Inhalte der leicht konstruierbaren Hälften dieser Querschnitte planimetrieren. Um die Veränderung dieser Inhalte zu veranschaulichen, kann man die Kurven konstruieren, deren Abszissen die Abstände jener Querschnitte von O und deren Ordinate die Inhalte sind.

Darapsky[1]) hat nach abgeleiteten Formeln die Inhalte paralleler Querschnitte mühsam berechnet und die entsprechenden Kurven für die Querschnitte in dem Oktaeder und Tetraeder eines Lagerrutaeders getrennt konstruiert. Erstens für die Querschnitte, die parallel zu zwei gegenüberliegenden Seiten des Lagerrutaeders sind; und er meint irrtümlich, daß es eine Durchsicht senkrecht zu diesen Seiten gebe, wie es in Fig. 17 durch einen gestrichelten Pfeil p angedeutet ist. Zwar geht diese Richtung durch das eine obere Bogendreieck und das darunter liegende, dann aber stößt sie auf eine Kugel in dem unten angereihten Lagerrutaeder. Zweitens für die auf einer Diagonale des Oktaeders senkrechten Querschnitte; und in beiden Fällen sind also diese Querschnitte nicht senkrecht auf einer Stollenachse.

Wie bei der einfachsten Lagerung S. 41 erörtert ist, ebenso gibt es auch bei der engsten Lagerung eine unendliche Mannigfaltigkeit allgemeiner ebener Durchschnitte, die wesentlich verschieden sind von denen der einfachsten Lagerung. In jeder Schnittebene, welche der Seite eines Lagerrutaeders parallel ist und durch die Mittelpunkte einer entsprechenden Kugelschicht geht, befindet sich ein aus engstens gelagerten Großkreisen bestehender Durchschnitt wie in Fig. 3. Wenn diese Schnittebene parallel bleibend verlegt wird, erstens bis zur Berührung an der nachbarlichen Kugelschicht, besteht der Durchschnitt aus gleichen Kleinkreisen und den Berührpunkten; zweitens bis sie durch die Berührpunkte beider Kugelschichten geht, besteht der Durchschnitt aus engstens gelagerten gleichen Kleinkreisen, die teils zu der einen, teils zu der anderen Kugelschicht gehören. In jeder Schnittebene, welche durch die Mittelpunkte einer Kugelschicht geht, die geht, die zu einem quadratischen Durchschnitt des Rutaeders parallel ist und dem in Fig. 20 entspricht, liegt der allereinfachste aus einfachstens gelagerten Großkreisen bestehende Durchschnitt, wie in Fig. 1.

Je nach den Lagen der Schnittebenen entsteht eine unerschöpfliche Fülle mannigfaltig aus Kreisen in verschiedener Größe und den Schnittgeraden der Lagerrutaeder gesetzmäßig schlicht geformter Muster, wobei von diesen Schnittgeraden nur ihre Strecken innerhalb der Zwischenflächen in Betracht kommen. Wenn an den Stellen der verschieden großen Kreise Blatt- oder Blumenformen malerisch farbig ausgeführt werden und den geformten Zwischenflächen eine entsprechende Grundfarbe erteilt wird, dann kann man sich denken, daß aus den Mustern Motive für die Grammatik des Ornamentes hervorgehen könnten[2]).

12. Engstens gelagerte gleiche Kugeln in einem Rutaeder. Wir nehmen an, daß in jeder zu den Kanten des Rutaeders parallelen Reihe der sich berührenden Kugeln die Anzahl n Kugeln vom Durchmesser d liegt, und ermitteln zuvörderst die dadurch bestimmte Kantenlänge l des in Fig. 16 schrägbildlich dargestellten Rutaeders, dessen Seite $ABD'C$ sich in der Bildebene befindet. Zu diesem Zweck konstruieren wir die wahre Höhe des Tetraeders $ABCD$, indem wir in dem Schnittpunkt D_1 der Höhen AG, CH des gleichseitigen Dreiecks ABC die auf AG Senkrechte $D_1 D_0$ errichten, deren Endpunkt D_0 durch den um A beschriebenen Kreisbogen CD_0 und auch durch den um G beschriebenen Kreisbogen AD_0 bestimmt wird. Demnach ist $D_1 D_0$ die wahre Größe der Höhe des Tetraeders; und damit ist die auf der Bildebene senkrechte Ebene $AD_1 D$ um AD_1 gedreht in die Bildebene umgelegt. In dieser Umlegung ist der mit ν bezeichnete Winkel $D_1 A D_0$ die wahre Größe des Neigwinkels der Kante AD gegen die Bildebene.

Bezeichnet h die Höhe in dem gleichseitigen Dreieck ABC, dessen Seitenlängen gleich l sind, ferner $\mathfrak{h}$ die Höhe des Tetraeders, so folgt: $h = {}^1/_2\, l \sqrt{3}$, $\mathfrak{h} = l \sqrt{\frac{2}{3}}$, $\sin \nu = \sqrt{\frac{2}{3}}$, und der Inhalt des Rutaeders $R = h\, \mathfrak{h}\, \mathfrak{l} = {}^1/_2\, l^3 \sqrt{2}$.

---

[1]) A. a. O. S. 192.

[2]) Owen Jones, The Grammar of Ornament 1856, mit 100 großen Foliotafeln. — Auch deutsch Grammatik der Ornamente, Ludwig Denicke. Leipzig 1856. — Ferner Franz Sales Meyer, Handbuch der Ornamentik. 1888.

Wir nehmen nun an, daß die in der Ecke A des Rutaeders liegende Kugel gegeben ist und die Bildebene in dem Punkt F der Geraden AG berührt. Diese Kugel wird von der Ebene $A D_1 D$ in einem Großkreis geschnitten, der mit ihrer Umlegung nach dem Kreis k_0' gelangt, dessen Mittelpunkt M_0' und dessen Durchmesser gleich d ist. Durch M_0' ziehen wir die zu AD_0 Parallele $M_0' \Phi$, welche $A D_1$ im Punkt Φ trifft und den Kreis k_0' einerseits im Punkt A schneidet. Sodann ist nach S. 35 dort für $\varphi = \nu$ die Strecke

$$\Phi A = {}^1/_2\, d \left(\frac{1}{\sin \nu} - 1\right) = {}^1/_2\, d \left(\sqrt{\frac{3}{2}} - 1\right)$$

und der Ergänzungswert $\eta = \sqrt{\frac{3}{2}} - 1 = 0{,}2247$. Da nun längs der Kante $A D$ im Raum die Anzahl n-Kugeln liegen, so ist die Kantenlänge

$$l = dn + d\eta = d(n + \eta) \text{ und } d = \frac{l}{n + \eta}.$$

Bei dieser Bestimmung der Strecke $A \Phi$ kommt also die Lage der Kugel in der der Ecke A nicht in Betracht und der Berührpunkt F des Kreises k_0' an der Geraden $A D_1$ kann demnach bei dieser Ableitung des Ergänzungswertes auch beliebig angenommen werden.

Der Gesamtinhalt der n^3 Kugeln ist

$$K = n^3 \left(\frac{d}{2}\right)^3 \frac{4}{3} \pi = \frac{n^3 l^3 \pi}{6 (n + \eta)^3} = \frac{l^3 \pi}{6 \left(1 + \frac{\eta}{n}\right)^3},$$

und für $n = \infty$ ist der Grenzwert $K_\infty = {}^1/_6\, l^3 \pi$, der mithin gleich dem Inhalt einer Kugel vom Durchmesser l ist.

Da der Inhalt des Rutaeders $R = {}^1/_2\, l^3 \sqrt{2}$ ist, so ergibt sich der Gesamtwert aller Zwischenräume

$$Z = R - K = \frac{l^3}{2} \left[\sqrt{2} - \frac{n^3 \pi}{3 (n + \eta)^3}\right] = \frac{l^3}{2} \left[\sqrt{2} - \frac{\pi}{3 \left(1 + \frac{\eta}{n}\right)^3}\right] \quad . \quad . \quad (8)$$

und für $n = \infty$

$$Z_\infty = \frac{l^3}{2} \left(\sqrt{2} - \frac{\pi}{3}\right).$$

Nehmen wir an, es sei in Fig. 17 ein Rutaeder von der Kantenlänge l mit in seinen acht Ecken liegenden Kugelsektoren dargestellt, deren Radius gleich ${}^1/_2\, l$ ist, dann bilden die acht Kugelsektoren, mit ihren Mittelpunkten aneinandergelegt, eine Kugel, deren Inhalt gleich ${}^1/_6\, l^3 \pi$ ist. Den von den acht konkaven sphärischen Dreiecken und den sechs Bogendreieckpaaren umgrenzten Zwischenraum nennen wir einen halbeingebeulten Rutaederhohlraum und sein Inhalt ist

$$R - {}^1/_6\, l^3 \pi = \frac{l^3}{2} \left(\sqrt{2} - \frac{\pi}{3}\right),$$

also gleich dem Grenzwert Z_∞; demnach folgt:

Satz 12. Der Gesamtinhalt aller Zwischenräume der in einem Rutaeder engstens gelagerten gleichen Kugeln verkleinert sich mit der Vergrößerung ihrer Anzahl bis zu einem Grenzwert, der gleich dem Inhalt des halbeingebeulten Rutaederhohlraums ist.

Wenn die Anzahl n so groß ist, daß der Ergänzwert $\eta = 0{,}2247$ vernachlässigt werden kann, der aber noch in der Kantenlänge enthalten bleibt, dann ist der Gesamtinhalt Z angenähert gleich dem Grenzwert Z_∞.

Das Verhältnis des Gesamtinhaltes aller Zwischenräume zu dem Inhalt des Rutaeders ist

$$V = \frac{Z}{R} = 1 - \frac{K}{R} = 1 - \frac{n^3 \pi \sqrt{2}}{6 (n + \eta)^3} = 1 - \frac{\pi \sqrt{2}}{6 \left(1 + \frac{\eta}{n}\right)^3},$$

und für $n = \infty$ der Grenzwert

$$V_\infty = 1 - \frac{\pi \sqrt{2}}{6} = 0{,}2595.$$

Der Gesamtinhalt der n^3 Kugelflächen ist

$$F = n^3 d^2 \pi = n^3 \frac{l^2 \pi}{(n+\eta)^2},$$

und wenn bei einer großen Anzahl n der Ergänzwert η vernachlässigt werden kann, dann ist F angenähert gleich $n l^2 \pi$; also gleich dem n-fachen Inhalt eines Kreises vom Radius l.

13. Engstens gelagerte gleiche Kugeln in einem rutaedrischen Parallelepiped. Das besondere Parallelepiped, bei dem an einer Ecke die drei Kanten gleiche Winkel von 60° einschließen, und demzufolge ebenso auch an der diagonal gegenüberliegenden Ecke, nennen wir ein rutaedrisches Parallelepiped, das durch drei Kantenlängen l_1, l_2, l_3 bestimmt ist. Wir nehmen an, daß längs dieser Kanten beziehlich die Anzahlen n_1, n_2, n_3 Kugeln liegen. Demnach folgt, weil, wie bei dem Ergänzwert $\eta = \sqrt{\frac{3}{2}} - 1 = 0{,}2247$ und der Durchmesser der Kugeln gleich d ist:

$l_1 = d(n_1 + \eta)$, $l_2 = d(n_2 + \eta)$, $l_3 = d(n_3 + \eta)$ und mithin $d = \frac{l_1}{n_1 + \eta} = \frac{l_2}{n_2 + \eta} = \frac{l_3}{n_3 + \eta}$

Ferner ist der Gesamtinhalt der $n_1 n_2 n_3$ Kugeln

$$K = n_1 n_2 n_3 \left(\frac{d}{2}\right)^3 \frac{4}{3} \pi = \frac{n_1 n_2 n_3 l_1 l_2 l_3 \pi}{6(n_1+\eta)(n_2+\eta)(n_3+\eta)} = \frac{l_1 l_2 l_3 \pi}{6\left(1+\frac{\eta}{n_1}\right)\left(1+\frac{\eta}{n_2}\right)\left(1+\frac{\eta}{n_3}\right)}$$

und für $n_1 = n_2 = n_3 = \infty$ der Grenzwert $K_\infty = {}^1/_6\, l_1 l_2 l_3 \pi$ und mithin gleich dem Inhalt eines dreiachsigen Ellipsoids, dessen Achsen l_1, l_2, l_3 sind.

Der Inhalt des rutaedrischen Parallelepipeds ist $P = {}^1/_2\, l_1 l_2 l_3 \sqrt{2}$, und hiernach ergibt sich der Gesamtinhalt aller Zwischenräume

$$Z = P - K = {}^1/_2\, l_1 l_2 l_3 \left[\sqrt{2} - \frac{n_1 n_2 n_3 \pi}{3(n_1+\eta)(n_2+\eta)(n_3+\eta)}\right]$$

$$= {}^1/_2\, l_1 l_2 l_3 \left[\sqrt{2} - \frac{\pi_1}{3\left(1+\frac{\eta}{n_1}\right)\left(1+\frac{\eta}{n_2}\right)\left(1+\frac{\eta}{n_3}\right)}\right] \quad . \quad . \quad (9)$$

und der Grenzwert $Z_\infty = {}^1/_2\, l_1 l_2 l_3 \left(\sqrt{2} - \frac{\pi}{3}\right)$; mithin folgt:

Satz 13. Der Gesamtinhalt aller Zwischenräume der in einem rutaedrischen Parallelepiped engstens gelagerten gleichen Kugeln verkleinert sich mit der Vergrößerung ihrer Anzahl bis zu einem Grenzwert.

Wenn die Anzahlen n_1, n_2, n_3 so groß sind, daß der Ergänzwert $\eta = 0{,}2247$ vernachlässigt werden, der aber noch in den Kantenlängen enthalten bleibt, dann ist der Gesamtwert Z angenähert gleich dem Grenzwert Z_∞.

Ist eine in drei ganzzahligen Faktoren zerlegbare Anzahl $m = n_x \cdot n_y \cdot n_z$ gegeben, dann gibt es für den Gesamtinhalt Z ebenso viele rutaedrische Parallelepipede wie die Anzahl der Zerlegungen, und falls die drei Faktoren gleich sind, also m eine Kubikzahl ist, darunter ein Rutaeder. Die betreffenden Kantenlängen werden durch je drei der Faktoren bestimmt.

Das Verhältnis des Gesamtinhaltes der Zwischenräume zu dem Inhalt des rutaedrischen Parallelepiped ist

$$V = \frac{Z}{P} = 1 - \frac{K}{P} = 1 - \frac{n_1 n_2 n_3 \pi \sqrt{2}}{6(n_1+\eta)(n_2+\eta)(n_3+\eta)} = 1 - \frac{\pi\sqrt{2}}{6\left(1+\frac{\eta}{n_1}\right)\left(1+\frac{\eta}{n_2}\right)\left(1+\frac{\eta}{n_3}\right)}$$

und der Grenzwert

$$V_\infty = 1 - \frac{\pi\sqrt{2}}{6} = 0{,}2595,$$

also derselbe wie bei dem Rutaeder.

In der Literatur ist der Irrtum entstanden, daß der Gesamtinhalt der Zwischenräume bei der engsten Lagerung gleicher Kugeln unabhängig sei von ihrer Anzahl und Größe. Lueger[1]) meint, daß die engste Lagerung nur aus tetraedrisch gelagerten Kugeln

[1]) A. a. O. 1) S. 7 auch 2) S. 123 u. 419.

bestehe und damit ein Quader angefüllt werden könne. Beides ist aber nicht zutreffend. Sodann folgert er vermittels irrationaler Anzahl Kugeln diesen Irrtum, zu dem auch A. Witting[1]) in anderer Weise ohne Kenntnis der engsten Lagerung gelangt ist.

An dem Uebergang der engsten Lagerung in den Rutaeder von jedem der beiden Tetraeder in das Oktaeder befindet sich eine Schicht der Kugeln, deren Mittelpunkte in der gemeinsamen Seite des Tetraeders und des Oktaeders liegen, also einerseits zu jenem und anderseits zu diesem gehören; deshalb ist es nötig, daß die engste Lagerung in dem Tetraeder und dem Oktaeder noch im einzelnen betrachtet wird.

14. Engstens gelagerte gleiche Kugeln in einem Tetraeder. Das in Fig. 26 schrägbildlich dargestellte Tetraeder $ABCD$ ist aus dem Rutaeder Fig. 16 mit der Kantenlänge l und den gleichen Bezeichnungen entnommen. Die umgelegte Höhe $D_1 D_0$ des Tetraeders ist wie dort konstruiert. In dem gleichschenkligen Dreieck $A\,G\,D_0$ ist der Schnittpunkt M_0 der Höhen JA, ΓG, $D_1 D_0$ der umgelegte Mittelpunkt der dem Tetraeder eingeschriebenen Kugel, deren Durchmesser wir mit d_1 bezeichnen. Um M_0 ist mit dem Radius $\frac{1}{2} d_1 = M_0 D_1 = M_0 J$ der umgelegte Großkreis k_0 der Kugel beschrieben. Infolge der ähnlichen rechtwinkligen Dreiecke $D_0 J M_0$, $D_0 D_1 G$ und wegen $G D_1 = G J = \frac{1}{3} G D_0$ ist

$$\frac{M_0 D_0}{M_0 J} = \frac{G D_1}{G D_0} = \frac{G J}{G D_0} = \frac{1}{3}\,;$$

mithin $$\tfrac{1}{2} d_1 = M_0 J = \tfrac{1}{3} M_0 D_0 = \tfrac{1}{4} D_1 D_0.$$

Demnach halbiert der Großkreis k_0 die Höhe $D_1 D_0$ und ebenso die Höhe JA. In diesen Halbierpunkten berühren die von der Mitte Γ der Dreiecksseite AD_0 nach den Mitten Φ, Φ' der Dreiecksseiten GA, GD_0 gehenden Geraden den Großkreis k_0. Dadurch entsteht der Rhombus $\Gamma\Phi' G \Phi$, dessen Diagonale $\Phi\Phi'$ durch M_0 geht, zu AD_0 parallel ist, und k_0 in den Punkten A, A' schneidet. Von Φ, Φ' sind auf AD_0 die Senkrechten $\Phi\Sigma$, $\Phi\Sigma'$ gefällt, und die Fußpunkte Σ, Σ' sind die Mitten der Strecken ΓA, ΓD_0, folglich ist $\Phi M_0 = A\Sigma$ und $\Phi' M_0 = D_0 \Sigma'$.

Der Winkel $D_1 A D_0 = \nu$ ist wie bei dem Rutaeder die wahre Größe des Neigwinkels der Kante AD gegen die in der Bildebene liegende Seite ABC des Tetraeders; demnach ist $\sin\nu = \sqrt{2/3}$, und weil auch der Winkel $M_0 \Phi D_1 = \nu$ ist, folgt nach S. 35:

$$\Phi A = \tfrac{1}{2} d_1 \left(\frac{1}{\sin\nu} - 1\right) = \tfrac{1}{2} d_1 \left(\sqrt{3/2} - 1\right).$$

Danach ergibt sich wegen $A\Sigma = \Phi M_0 = \Phi A + \frac{1}{2} d_1$

$$\Phi A + A\Sigma = 2\,\Phi A + \tfrac{1}{2} d_1 = \tfrac{1}{2} d_1 \left(\sqrt{3/2} - 1\right) = \tfrac{1}{2} d_1 \left(\sqrt{6} - 1\right)$$

und ebenso andererseits für $\Phi' A' = D_0 \Sigma'$ derselbe Wert. Dann ist $\vartheta = \sqrt{6} - 1 = 1{,}4495$ gesetzt der Ergänzwert.

Liegt nun längs einer Kante des Tetraeders die Anzahl n gleicher Kugeln vom Durchmesser d, so ist die Kantenlänge

$$l = n\,d + d\,\vartheta = d\,(n + \vartheta) \quad \text{und} \quad d = \frac{l}{n + \vartheta}.$$

Wie bei dem Rutaeder, so ist auch hier in dem gleichseitigen Dreieck ABC die Höhe $AG = h = \frac{1}{2} l \sqrt{3}$, und die Höhe des Tetraeders $D_1 D_0 = \mathfrak{h} = l \sqrt{2/3}$; also sein Inhalt $T = \frac{1}{6} l\,h\,\mathfrak{h} = \frac{1}{12} l^3 \sqrt{2}$.

Da nach der Lehre von den geometrischen Reihen die Anzahl der Kugeln in dem Tetraeder gleich $\frac{1}{6}\,n\,(n+1)\,(n+2)$ ist, so ist der Gesamtinhalt der Kugeln

$$K = \tfrac{1}{36} n(n+1)(n+2)\,d^3\pi = \tfrac{1}{36} n(n+1)(n+2) \frac{l^3\pi}{(n+\vartheta)^3} = \tfrac{1}{36}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{2}{n}\right) \frac{l^3\pi}{\left(1 + \frac{\vartheta}{n}\right)^3}$$

und für $n = \infty$ der Grenzwert $K_\infty = \frac{1}{36} l^3 \pi$; also gleich dem Inhalt einer Sechtelkugel vom Durchmesser l. Sonach ergibt sich der Gesamtinhalt aller Zwischenräume:

$$\left.\begin{aligned} Z = T - K &= \frac{l^3}{12}\left[\sqrt{2} - n(n+1)(n+2)\frac{\pi}{3\,(n+\vartheta)^3}\right] \\ &= \frac{l^3}{12}\left[\sqrt{2} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{2}{n}\right)\frac{\pi}{3\left(1 + \frac{\vartheta}{n}\right)^3}\right] \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

und für $n = \infty$ der Grenzwert $Z_\infty = \dfrac{l^3}{12}\left(\sqrt{2} - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

[1]) Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, Jahrg. 45, 1914, S. 359.

Demnach verkleinert sich Z mit der Vergrößerung der Anzahl n zu dem Grenzwert Z_∞. Der durch vier in den Ecken des Tetraeders liegend gedachten Kugelsektoren bestimmten Zwischenraum, deren Radius gleich $^1/_2\, l$ ist, wird von den vier konkaven sphärischen Dreiecken und den vier in den Seiten liegenden Bogendreiecken begrenzt; aber sein Inhalt ist nicht wie bei dem Rutaeder gleich Z. Dieser Zwischenraum ist ein halbeingebeulter Tetraederhohlraum.

Ferner ist das Verhältnis

$$V = \frac{Z}{T} = 1 - \frac{K}{T} = 1 - {}^1/_6 \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{2}{n}\right) \frac{\pi \sqrt{2}}{\left(1 + \frac{\vartheta}{n}\right)^3},$$

und für $n = \infty$ folgt der Grenzwert $V_\infty = {}^1/_6 \sqrt{2}\, \pi = 0{,}2595$, wie bei dem Rutaeder.

Die kubooktaedrischen Kugelbünde sind in dem Tetraeder so gelagert, daß die vier Paare der Dreieckseiten des Kubooktraeders zu den Tetraederseiten und die drei Paare der Quadratseiten zu je zwei gegenüberliegenden Tetraederkanten parallel sind. Die Achsen der sechs Stollen in dem Tetraeder sind parallel zu seinen Kanten.

15. Engstens gelagerte gleiche Kugeln in einem Oktaeder. Bei dem in Fig. 27 schrägbildlich dargestellten Oktaeder $ABCDEF$ von einer Kantenlänge l, dessen Mittelpunkt mit M bezeichnet ist, befindet sich in der durch die Diagonale EF und die Mitten Φ, Φ' der Kanten AD, BC gelegten Ebene der Neigwinkel $M \Phi E = \nu$ der Seite ADE gegen die Ebene $ABCD$ in seiner wahren Größe. Der um M beschriebene die beiden Geraden ΦE, $\Phi' E$ berührende Kreis ist der in der Ebene $\Phi E \Phi'$ liegende Großkreis der dem Oktaeder eingeschriebenen Kugel, deren Durchmesser wir mit d_1 bezeichnen. Dieser Großkreis schneidet die Gerade $\Phi \Phi'$ in den Punkten A, A'. Da $ME = {}^1/_2\, l \sqrt{2}$ und $\Phi E = {}^1/_2\, l \sqrt{3}$ ist, so ergibt sich $\sin \nu = \sqrt{^2/_3}$ wie bei dem Tetraeder, und nach S. 35 auch $\Phi A = \Phi' A' = {}^1/_2\, d_1 \left(\frac{1}{\sin \nu} - 1\right) = {}^1/_2\, d_1 (\sqrt{^3/_2} - 1)$; demnach ist der Ergänzwert $\varkappa = \sqrt{^3/_2} - 1 = 0{,}2248$.

Liegt nun längs einer Kante des Oktaeders die Anzahl n Kugeln vom Durchmesser d, so ist die Kantenlänge

$$l = dn + d\varkappa = d(n + \varkappa) \quad \text{und} \quad d = \frac{l}{n + \varkappa}.$$

Da das Oktaeder aus zwei gleichkantigen quadratischen Pyramiden besteht, so kann die Anzahl $\mathfrak{n}$ der in ihm liegenden Kugeln in folgender Weise ermittelt werden. Nach der Lehre von den arithmetischen Reihen, ist in einer dieser Pyramiden die Anzahl der Kugeln gleich ${}^1/_6\, n(n+1)(2n+1)$. In der mittleren Schicht, die zu beiden Pyramiden gehört, befinden sich die Anzahl n^2 Kugeln; folglich ist

$$\mathfrak{n} = {}^1/_3\, n(n+1)(2n+1) - n^2 = {}^1/_3\, n(2n^2 + 1).$$

Der Inhalt des Oktaeders ist $O = {}^1/_3\, l^3 \sqrt{2}$, und der Gesamtinhalt der Anzahl $\mathfrak{n}$ Kugeln

$$K = {}^1/_{18}\, n(2n^2 + 1) d^3 \pi = {}^1/_{18}\, n(2n^2 + 1) \frac{l^3 \pi}{(n + \varkappa)^3} = {}^1/_{18} \left(2 + \frac{1}{n^2}\right) \frac{l^3 \pi}{\left(1 + \frac{\varkappa}{n}\right)^3};$$

mit ist für $n = \infty$ der Grenzwert $K_\infty = {}^1/_9\, l^3 \pi$, also gleich $^2/_3$ des Inhaltes der Kugel vom Durchmesser l. Hiernach ist der Gesamtinhalt aller Zwischenräume

$$Z = O - K = \frac{l^3}{3}\left[\sqrt{2} - {}^1/_6\, n(2n^2 + 1) \frac{\pi}{(n + \varkappa)^3}\right] = \frac{l^3}{3}\left[\sqrt{2} - {}^1/_6 \left(2 + \frac{1}{n^2}\right) \frac{\pi}{\left(1 + \frac{\varkappa}{n}\right)^3}\right] \quad (11)$$

und für $n = \infty$ der Grenzwert $Z_\infty = \frac{l^3}{3}\left(\sqrt{2} - \frac{\pi}{3}\right)$.

Der durch die sechs in den Ecken des Oktaeders liegend gedachten Kugelsektoren bestimmten Zwischenraum, deren Radius $^1/_2\, l$ ist, wird von den sechs konkaven sphärischen Dreiecken und den acht in den Seiten liegenden Bogendreiecken begrenzt; aber sein Inhalt ist nicht wie bei dem Rutaeder gleich Z. Dieser Zwischenraum ist ein halbeingebeulter Oktaederhohlraum.

Ferner ist das Verhältnis

$$V = \frac{Z}{O} = 1 - \frac{K}{O} = 1 - {}^1/_{12}\left(2 + \frac{1}{n^2}\right)\frac{\pi\sqrt{2}}{\left(1 + \frac{\varkappa}{n}\right)^3}$$

und für $n = \infty$ der Grenzwert $V_\infty = 1 - {}^1/_6 \sqrt{2}\,\pi = 0{,}2595$.

Die kubooktaedrischen Kugelbünde sind in dem Oktaeder so gelagert, daß die acht Dreieckseiten des Kubooktaeders zu den Oktaederseiten und die drei Paare Quadratseiten zu den drei Ebenen der Diagonalen des Oktaeders parallel sind. Die Achsen der sechs Stollen sind parallel zu den sechs Paaren paralleler Oktaederkanten.

16. Engstens gelagerte gleiche Kugeln in einer gleichkantigen quadratischen Pyramide. Bei der in Fig. 28 auf die Spitze gestellten, oben offenen, gleichkantigen, quadratischen Pyramide $ABCDS$ von der Kantenlänge l legen wir die durch die Höhe ΩS und die Mitten T, U der Kanten AD, BC gehende Ebene. In ihr ist der Winkel $\Omega TS = \nu$ die wahre Größe des Neigwinkels der Seite ADS gegen die Ebene $ABCD$. Durch die Halbiergerade TM des Neigwinkels wird auf ΩS der Mittelpunkt M der Kugel bestimmt, die der Pyramide eingeschrieben ist; denn der um M mit dem Radius $M\Omega$ beschriebene Kreis k_1, der die Dreieckshöhen TS, US berührt, ist ein Großkreis dieser Kugel, und seinen Durchmesser bezeichnen wir mit d_1. Die durch M gehende zu TU Parallele schneidet k_1 in den Punkten A, A' und trifft TS, US in den Punkten Φ, Φ', von denen auf TU die Senkrechten $\Phi\Sigma$, $\Phi\Sigma'$ gefällt sind.

Es ist $\Omega S = {}^1/_2 l\sqrt{2}$, $TS = {}^1/_2 l\sqrt{3}$, mithin $\sin\nu = \sqrt{{}^2/_3}$ und $\cot\nu = \sqrt{{}^1/_2}$; ferner ist nach S. 35 die Strecke $\Phi A = {}^1/_2 d_1\left(\frac{1}{\sin\nu} - 1\right) = {}^1/_2 d_1\left(\sqrt{{}^3/_2} - 1\right)$, und $T\Sigma = \Phi\Sigma\cot\nu = {}^1/_2 d_1\sqrt{{}^1/_2}$; folglich $\Phi A + T\Sigma = {}^1/_2 d_1\left(\sqrt{{}^3/_2} - 1 + \sqrt{{}^1/_2}\right)$. Danach ist wegen $\Phi A = \Phi' A'$ der Ergänzwert $\lambda = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}} - 1 = 0{,}9318$. Liegt längs einer Kante die Anzahl n Kugeln vom Durchmesser d, so ist die Kantenlänge

$$l = dn + d\lambda = d(n + \lambda) \text{ und } d = \frac{l}{n + \lambda}.$$

Da die Anzahl der Kugeln in der gleichkantigen quadratischen Pyramide gleich ${}^1/_6\, n(n+1)(2n+1)$ ist, so ist der Gesamtinhalt aller Kugeln

$$\begin{aligned} K &= {}^1/_{36}\, n(n+1)(2n+1)\, d^3\pi \\ &= {}^1/_{36}\, n(n+1)(2n+1)\frac{l^3\pi}{(n+\lambda)^3} = {}^1/_{36}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)\frac{l^3\pi}{\left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^3}, \end{aligned}$$

und für $n = \infty$ der Grenzwert $Z_\infty = {}^1/_{18}\, l^3\pi$ gleich eine Drittelkugel vom Durchmesser l.

Der Inhalt dieser Pyramide ist $P = {}^1/_6\, l^3\sqrt{2}$. Sonach ist der Gesamtinhalt aller Zwischenräume

$$\begin{aligned} Z = P - K &= \frac{l^3}{6}\left[\sqrt{2} - {}^1/_6\, n(n+1)(2n+1)\frac{l^3\pi}{(n+\lambda)^3}\right] \\ &= \frac{l^3}{6}\left[\sqrt{2} - {}^1/_6\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)\frac{l^3\pi}{\left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^3}\right] \quad (12), \end{aligned}$$

und für $n = \infty$ der Grenzwert $Z_\infty = \frac{l^3}{6}\left(\sqrt{2} - \frac{\pi}{3}\right)$.

Demnach verkleinert sich Z mit der Vergrößerung der Anzahl n zu dem Grenzwert Z_∞.

Ferner ist das Verhältnis:

$$V = \frac{Z}{P} = 1 - \frac{K}{P} = 1 - {}^1/_{12}\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)\frac{\pi\sqrt{2}}{\left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^3}\right]$$

und für $n = \infty$ der Grenzwert $V_\infty = 1 - {}^1/_6 \sqrt{2}\,\pi$.

Die kubooktaedrischen Kugelbünde sind in der gleichkantigen Pyramide so gelagert, daß die vier Paare Dreieckseiten des Kubooktaeders zu den vier Dreieckseiten dieser Pyramide und die drei Paare Quadratseiten zu den Ebenen ASC, BSD, $ABCD$ parallel sind. Von den sechs Stollenachsen sind vier zu den Spitzenkanten parallel und zwei zu den beiden Paaren parallel der Kanten an dem Quadrat.

17. Engstens gelagerte gleiche Kugeln in einem Doppeltetraeder. Bei der engsten Lagerung in einem aus zwei Tetraedern mit einer gemeinsamen Seite bestehenden Doppeltetraeder, die wir schließlich noch betrachten wollen, verfahren wir in einer besonderen Weise. Nach der Zeichnung in Fig. 28 wird eine gleichkantige quadratische Pyramide in doppelter Größe aus Karton hergestellt. Die vier Dreieckseiten mit der gemeinsamen Ecke in der Spitze S werden durch Einritzen in den Karton bestimmt, die somit in den Ritzen gelenkig aneinander verbunden bleiben, hiernach herausgeschnitten und geknickt; sodann wird die Pyramide gebildet und über die Kante, in der zwei Dreieckseiten zusammengefügt sind, ein gummierter Papierstreifen geklebt. Wenn wir diese hohle, oben offene Pyramide mit engstens gelagerten Schussern füllen und so verändern, daß z. B. die Diagonale AC gleich der Kantenlänge l wird; dann entsteht ein gleichseitiges Dreieck ASC, welches die gemeinsame Seite eines Doppeltetraeders ist und dessen Spitzen B, D sind. Dabei verwandelt sich die in dem Quadrat $ABCD$ liegende Schicht mit den einfachstens gelagerten Schussern in zwei dachförmig gelegene gleichseitige Dreiecke ACB, ACD mit je einer Schicht engstens gelagerten Schussern. Bei dieser Veränderung verändern sich die kubooktaederischen Kugelbünde und richten ihre Lagen dem Doppeltetraeder entsprechend, und ebenso auch die Achsen der Stollen.

Der Inhalt des Doppeltetraeders ist gleich $\frac{1}{6} l^3 \sqrt{2}$, also gleich Inhalt der gleichkantigen quadratischen Pyramide; demnach gelten die für sie vorhin abgeleiteten Inhaltsbeziehungen auch für das Doppeltetraeder.

18. Bemerkungen zur Anwendung der Theorie. Nach der Erkenntnis der Theorie kann nun die »Wissenschaft der Anwendung« für die Praxis, die in Wirklichkeit vorkommenden Umstände beachtend, zu Werke gehen. Bei der Bewegung des Grundwassers im gleichartig vorausgesetzten Gerölle wird wegen der großen Dimensionen des Grundwasserträgers mit der großen Anzahl der Kugeln der Ergänzwert zu der Kantenlänge des Rutaeders vernachlässigt werden können; und dann kommt nur der zugehörige Grenzwert des Gesamtinhalts aller Zwischenräume in Betracht. Der dadurch entstandene Fehler ist durch die Theorie bestimmbar. Das gleiche gilt bei der Bewegung des Filterwassers in gesiebtem Sand, wobei nach Erfahrung der Durchmesser der Sandkörner gleich 0,5 oder auch bis gleich 1 mm angenommen wird. Dadurch wird die Berechnung der Anzahl der Kugeln und der Gesamtinhalt aller Zwischenräume sehr vereinfacht.

Um eine Kenntnis von dem Bewegungsvorgang des Wassers zu erlangen, dient die Hydrodynamik, bedingt durch die vielen Widerstände, der Kohäsion, Adhäsion, Reibung, Kapillarität, Oberflächenspannung und Kleberigkeit. So wird dann die geringe Durchgangsgeschwindigkeit des Wassers und die Druckhöhe zur Ueberwindung der Widerstände empirisch ermittelt. Man hat angenommen, daß in der Wirklichkeit die Strömung durch Haarröhrchen erfolge. In der Theorie sind aber die Stollen, als die Kanäle für das Wasser betrachtet, keine Röhrchen mit fester Wandung, sondern ein- und ausgebuchtete Hohlräume, umgeben teils von den festen sphärischen Dreiecken auf den Kugelflächen, teils von den in den Seiten der Lagerrutaeder liegenden theoretischen Oeffnungen; und durch jeden Lagerrutaeder gehen sechs Kanäle mit strömendem Wasser.

Um den Berührpunkt je zweier Kugeln bildet sich ein ringförmiger kapillarer Wulst. Jeder der halb eingebeulten Tetraederhohlräume in der engsten Lagerung der Kugeln wird von den sechs in den Mitten auf den Kanten senkrechten kapillaren Wulsten, und jeder der halbeingebeulten Oktaederhohlräume wird von den zwölf in den Mitten auf den Kanten senkrechten kapillaren Wulsten verengert. Demnach bleiben bei der Filterung die in dem Wasser befindlichen Schmutzteilchen in den oberen Schichten feiner Sandkörner hängen, und durch die unteren Schichten gröberer Sandkörner fließt klares Wasser aus dem Filter.

So ist uns durch diese Abhandlung die wichtige Lehre gegeben: Dem Anwenden muß das Erkennen vorausgehen. 337

Über die Kraftschlüssigkeit von Zahnradgetrieben, insbesondere für Schiffspropeller.

Von **H. REISSNER** in Berlin.

Die Verwendung von Zahnradgetrieben für Propellerantrieb in Luft- und Wasserfahrzeugen hat sich in den letzten Jahren insbesondere für schnellaufende Dampfturbinen und Explosionsmotoren immer mehr in die Technik eingeführt. Die Schwierigkeiten der Betriebssicherheit, der Abnutzung und des ruhigen und nicht zu geräuschvollen Ganges sind für die schnellaufenden Turbinen durch peinlich genaue Zahnformen, niedrige spezifische Zahndrucke, richtige Härtung und feines Einschleifen überwunden worden, indem durch diese Maßregeln die Zwangläufigkeit der Zahnräder aufs Aeußerste vervollkommnet wurde. Jedoch für Explosionsmotoren sind die Schwierigkeiten noch nicht überwunden.

Es scheint nun bisher ein weiteres Mittel zur Verhütung des toten Ganges, zur Schonung der Zähne und zur Unschädlichmachung von Herstellungsfehlern noch nicht bemerkt, geschweige denn genauer untersucht worden zu sein, nämlich die Erzwingung der Kraftschlüssigkeit im Getriebe dadurch, daß der Zahndruck im Getriebe niemals seine Richtung wechselt, oder anders ausgedrückt, daß die Schwingungsamplitude des Drehmomentes um seinen Mittelwert niemals größer ist als dieser Mittelwert [1]).

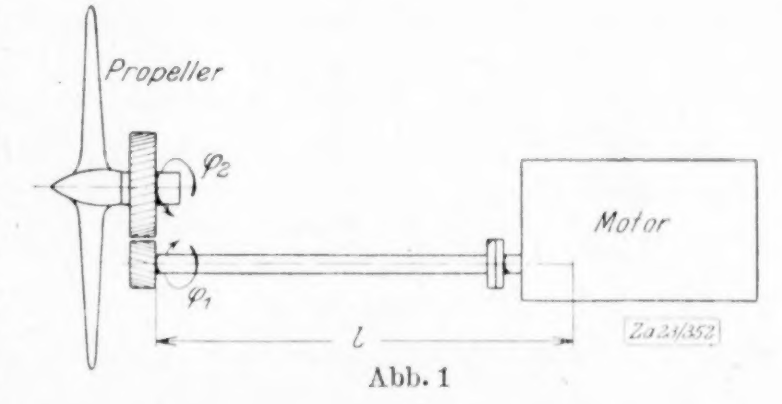


Abb. 1

Der Zweck der folgenden Rechnungen soll es sein, quantitative und bequem anwendbare Bedingungen für diese Forderung bei der einfachsten, vorkommenden Anordnung aufzustellen. Für Anordnungen von mehr zusammengesetzter Bauart werden sich entsprechende Bedingungen der Kraftschlüssigkeit nach dem unten auseinandergesetzten Rechnungsgange ebenfalls, wenn auch nicht ganz so einfach aufstellen lassen.

1. Anordnung und Bezeichnungen. Das betrachtete System möge bestehen aus einem Antriebsmotor, einem Getriebe, einem Arbeit verzehrenden Mechanismus, nämlich dem Propeller und einer Antriebswelle nach Abbildung. Für die Rechnung macht es keinen Unterschied, ob das Getriebe am Motor oder am Propeller sitzt bezw. auf welcher Seite die lange Antriebswelle sich befindet, wenn nur das Trägheitsmoment des Getriebes entweder zum Motor oder zum Propeller hinzugerechnet werden darf.

Dagegen würde es die Rechnung nicht unwesentlich verwickelter machen, wenn ein Getriebe von nicht vernachlässigbarem Trägheitsmoment im Mittelteil der langen Antriebswelle sitzen würde, indem dann die Bewegungsgleichungen eine Variable mehr enthalten würden. Von dieser später notwendigen Erweiterung der Aufgabe soll in dieser Arbeit abgesehen werden.

Es mögen nun die folgenden Bezeichnungen (siehe Abb. 1) eingeführt werden:

M_d das treibende Drehmoment des Motors,

M_c das Drehmoment, welches durch die Zahnräder übertragen wird,

M_w das Drehmoment, welches vom Propeller aufgenommen wird.

Im Mittel sind diese Drehmomente einander gleich, aber sie sind alle drei Funktionen der Zeit und ihre Momentanwerte sind im allgemeinen ungleich.

Ferner:

φ_1 die Winkelstellung des Wellenstumpfes der Motorwelle, gerechnet von einer willkürlich festgesetzten Anfangstellung aus,

φ_2 die Winkelstellung des Propellers, desgl.,

---

[1]) Nach Abfassung dieser Arbeit kam mir ein Aufsatz von J. H. Smith, Nodal arrangements of geared drives, Engineering 1922, p. 438 bis 440 und 467 bis 469, vor Augen, in dem die Frage behandelt wird, wie bei Antrieb mehrerer Motoren auf ein Getriebe Schwebungen zu vermeiden sind. Es handelt sich also in jener Arbeit nicht um die Ungleichmäßigkeiten des Antriebes, sondern um Eigenschwingungen.

α das Uebersetzungsverhältnis des Getriebes, dergestalt, daß $\alpha\,\varphi_2$ die Winkelstellung des treibenden Zahnrades in dem in der Abbildung veranschaulichten Fall ist,

J_1 das ideelle Trägheitsmoment des Motors, des Schwungrades und gegebenenfalls des unmittelbar gekoppelten Getriebes, dadurch definiert, daß $E_1 = {}^1/_2 J_1 \omega_1{}^2 = {}^1/_2 J_1 \dot{\varphi}_1{}^2$ die gesammte lebendige Kraft dieser Teile vorstellt; hierbei ist J_1 eine Funktion von φ_1, die aus der Kinematik des Schubkurbelgetriebes bekannt ist,

J_{02} das Trägheitsmoment des Propellers nebst gegebenenfalls unmittelbar angekoppeltem Getriebe, so daß also die lebendige Kraft des Propellers $E_2 = {}^1/_2 J_{02}\,\dot{\varphi}_2{}^2$ ist, wo J_{02} als konstant betrachtet werden kann,

$J_2 = J_{02}/\alpha^2$ das auf die Motorwelle reduzierte Trägheitsmoment des Propellers.

2. Aufstellung der Bewegungsgleichungen. Das veränderliche ideelle Trägheitsmoment der bewegten Motorteile wird am deutlichsten berücksichtigt, wenn man zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen die Lagrangesche Form derselben benutzt. Man hat also, indem man Motor und Propeller als zwei Systeme behandelt, die nur durch das gemeinsame Drehmoment M_c verknüpft sind, zu schreiben:

$$\left.\begin{aligned} E_1 &= {}^1/_2 J_1 \omega_1{}^2 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_1}{\partial \omega}\right) - \frac{\partial E_1}{\partial \varphi_1} &= M_d - M_c \end{aligned}\right\} \quad (1), \qquad \left.\begin{aligned} E_2 &= {}^1/_2 J_{02}\, \omega_2{}^2 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_2}{\partial \omega_2}\right) - \frac{\partial E_2}{\partial \varphi_2} &= M_c\, \alpha - M_w \end{aligned}\right\} \quad . \quad (2).$$

Bei dieser Formulierung ist allerdings die Trägheit der Antriebswelle selbst vernachlässigt, was im allgemeinen offenbar zulässig ist.

Die Ausführung der Differentiationen ergibt:

$$J_1\, \dot{\omega}_1 + {}^1/_2 J_1{}'\, \omega_1{}^2 = M_d - M_c \quad . \quad . \quad (1\,a), \qquad J_{02}\, \dot{\omega}_2 = M_c\, \alpha - M_w \quad . \quad . \quad (2\,a),$$

wo $J_1{}' = \frac{d J_1}{d \varphi_1}$, und zu beachten ist, daß $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \omega}\frac{d\omega}{dt}$.

Der Mittelwertzustand ist gekennzeichnet durch:

$$M_d = M_c = \frac{M_w}{\alpha} = M_0, \qquad \omega_1 = \omega_2\, \alpha = \omega_0.$$

Die augenblicklichen Werte der Drehmomente sind gegeben:

für M_d durch das Momentendiagramm des Motors,
für M_c durch die elastische Verdrehung der Welle und
für M_w durch die Energieaufnahme des Propellers

in folgender Weise:

$M_d = M_0 + f(\varphi)$, wo $f(\varphi)$ die Schwankung des Drehmomentes bedeutet, welche jedenfalls periodisch ist zwischen zwei Explosionen oder zwei Expansionen, so daß man näherungsweise setzen kann:

$$M_d = M_0 + \mu_{01} \cos 2\pi \frac{\varphi_1}{\beta_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

mit μ_{01} als Amplitude der Ungleichförmigkeit des Drehmomentes und β_1 als Stellungswinkel der Welle zwischen zwei Explosionen.

$$M_c = c\,(\varphi_1 - \alpha\,\varphi_2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

bringt zum Ausdruck, daß das von der Welle weitergeleitete Drehmoment proportional der Winkeldifferenz zwischen den Wellenenden sein muß.

Die Größe c ist das Drehmoment, welches die Welle elastisch um den Winkel 1 verdreht, entweder infolge der Nachgiebigkeit der Welle selbst oder einer zwischengeschalteten elastischen Kupplung, welch letztere man offenbar in ihrer Wirkung durch eine Welle entsprechender Länge l (Abb. 1) darstellen kann, so daß man allgemein setzen darf:

$$c = \frac{J_p\, G}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5),$$

wo J_p das wirkliche oder ideelle polare Trägheitsmoment der Welle außerhalb des Motors und G den Schubelastizitätsmodul des Wellenmaterials bedeuten.

Die Größe c kann auch ausgedrückt werden durch das hindurchgeleitete Drehmoment M_d und die zugelassene, mittlere Torsionsspannung K_d, z. B. bei voller Welle in der Form

$$c = \frac{G}{l} \sqrt[3]{\frac{2\, M_d^4}{\pi\, K_d^4}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5\,\mathrm{a}).$$

Schließlich kann das vom Propeller aufgenommene Drehmoment unter Beachtung der Tatsache, daß es bei störungsfreier Bewegung dem Quadrat der Winkelgeschwindigkeit ω_2 proportional ist, gesetzt werden gleich

$$M_w = \frac{\omega_2^2}{(\omega_0/\alpha)^2}\left[M_0\, \alpha + \mu_{02} \cos\left(2\pi \frac{\varphi_2}{\beta_2} + \varepsilon\right)\right] \quad \ldots \ldots \quad (6),$$

wo ω_0 die mittlere Winkelgeschwindigkeit der Motorwelle und das zweite Glied der rechten Seite eine durch Strömungshindernisse des Schiffskörpers verursachte periodische Schwankung des Drehmomentes und darin μ_{02} die Amplitude der Schwankung, β_2 den Winkel zwischen zwei Strömungshindernissen auf dem Umlaufwege des Propellers und ε der Winkelunterschied zwischen Maximalamplitude der Motorschwankung und der Propellerschwankung bedeuten.

3. Kleine Schwingungen des Systems. Mit diesen Ansätzen sollen nun die kleinen Schwingungen des Systems Motor, Welle, Getriebe und Propeller berechnet werden, und zwar zuerst die sogenannten Eigenschwingungen, d. h. die Schwingungen bei Abwesenheit äußerer Störungen ($\mu_{01} = 0$, $\mu_{02} = 0$) und sodann die durch die Drehmomentschwankungen (μ_{01} bezw. μ_{02}) am Motor bezw. am Propeller erzwungenen Schwingungen, aus denen sich die Bedingungen für die Kraftschlüssigkeit des Getriebes ergeben werden.

Wir setzen in der für kleine Schwingungen bekannten Weise:

$$\varphi_1 = \omega_0\, t + \psi_1, \qquad \varphi_2 = \frac{1}{\alpha}(\omega_0\, t + \psi_2) - \varphi_{20} \quad \ldots \quad (7),$$

so daß also ψ_1 und ψ_2 die Winkelschwankungen an den beiden Endpunkten der elastischen äußeren Antriebswelle sind und ψ_2 nicht die unmittelbare Schwankung des Propellerdrehwinkels φ_2, sondern diese, umgerechnet auf Motordrehzahl bedeutet, während φ_{20}, der statische Verdrehungswinkel der Welle, der Gl. $M_0 = c_2\, \varphi_{20}$ entspricht. Die Gleichungen (1a) werden dann:

$$J_1\, \ddot{\psi}_1 + \frac{1}{2} J_1' (\omega_0^2 + 2\, \omega_0\, \dot{\psi}_1) = \mu_{10} \cos 2\pi \frac{\omega_0\, t}{\beta_1} - c\,(\psi_1 - \psi_2) \quad \ldots \quad (1\,\mathrm{b}),$$

$$\frac{1}{\alpha} J_{02}\, \ddot{\psi}_2 = \alpha\, c\,(\psi_1 - \psi_2) - \mu_{02} \cos\left(2\pi \frac{\omega_0\, t + \varepsilon}{\beta_2}\right) - 2\, \frac{M_0\, \alpha\, \dot{\psi}_2}{\omega_0} \quad \ldots \quad (2\,\mathrm{b}).$$

Hier sind nicht nur die Quadrate und Produkte der kleinen Größen ψ_1 und ψ_2, sondern auch $\dot{\psi}_1$ und $\dot{\psi}_2$ gegen ω_0 vernachlässigt, ferner die Störungsamplituden μ_1 und μ_2 von nicht größerer Größenordnung als die $c\psi$.

Schließlich darf man voraussetzen, daß die Motormassen soweit ausgeglichen sind, daß das Glied $J'\dot{\psi}_1$ unberücksichtigt bleiben kann und daß, da J' ebenfalls eine in φ_1 periodische Funktion sein muß, das Glied $^1/_2\, J'_1\, \omega_0$ bezw. dessen Grundschwingung mit eingeschlossen gedacht sein kann in der Grundschwingung des Motordrehmomentes M_d, nämlich in dem Gliede $\mu_{01} \cos 2\pi \frac{\omega_0\, t}{\beta}$, wie ja auch gewöhnlich in dem in der Technik angesetzten Motordrehmoment (Tangentialdruck) -diagramm die Massenwirkungen des Schubkurbelgetriebes einbezogen werden.

Eine Ordnung der obigen Gleichungen ergibt, wenn man von jetzt ab den Index 0 bei ω_0 und μ_0 fortläßt:

$$\ddot{\psi}_1 + \frac{c}{J_1}(\psi_1 - \psi_2) = \mu_1 \cos\left(2\pi \frac{\omega\, t}{\beta_1}\right) \quad \ldots \ldots \quad (1\,\mathrm{c}),$$

$$\ddot{\psi}_2 + \frac{2\,M}{\omega\, J_2} \cdot \dot{\psi} - \frac{c}{J_2\, \omega^2}(\psi_1 - \psi_2) = \mu_2 \cos\left(2\pi \frac{\omega\, t}{\beta_1}\right) \quad \ldots \quad (2\,\mathrm{c}),$$

wo $J_2 = \frac{J_{02}}{\alpha^2}$ das auf die Motorwelle reduzierte Trägheitsmoment des Propellers bedeuten und $\mu_1 = \frac{\mu_{01}}{J_1}$ und $\mu_2 = -\frac{\mu_{02}}{J_2}$ gesetzt sind.

4. Frequenzen der Eigenschwingungen. Die Eigenschwingungen erhält man bekanntlich, wenn man die rechten Seiten dieser Gleichungen, d. h. die Störungsfunktionen bezw. deren Amplituden μ_1 und μ_2 gleich Null setzt und den für lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten gültigen Lösungsansatz macht:

$$\psi_1 = \alpha_1 e^{p \omega t} \qquad \psi_2 = \alpha_2 e^{p \omega t}$$

wo der Faktor ω im Eponenten die Größe p zu einer reinen Zahl macht. Die Einsetzung ergibt, wie man weiß, nur dann eine identische Erfüllung der Differentialgleichungen (1 b) mit null gesetzter rechter Seite mit nicht verschwindenden Amplituden α_1 und α_2, wenn für die Frequenz p eine Gleichung erfüllt ist, die in Determinantenform lautet:

$$\begin{vmatrix} \omega^2 p^2 + \frac{c}{J_1} & -\frac{c}{J_1} \\ \frac{c}{J_2} & -\omega^2 p^2 + \frac{2M}{J_2} p + \frac{c}{J_2} \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8\,a)$$

oder

$$\left(\omega^2 p^2 + \frac{c}{J_1}\right)\left(\omega^2 p^2 + \frac{2M}{J_2} p + \frac{c}{J_2}\right) - \frac{c^2}{J_1 J_2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8\,b).$$

Diese Gleichung vom 4ten Grade in p hat, wie man sieht, eine **Wurzel** $p = 0$, welche aber nur bedeutet, daß eine gleichmäßige Verdrehung $\psi_1 = \psi_2 =$ konst. sich unverändert erhält, so daß die maßgebende Gleichung dritten Grades geschrieben werden kann:

$$p^3 + p^2 \frac{2M}{J_2 \omega^2} + p \frac{c}{J_1}\left(1 + \frac{J_1}{J_2}\right) + \frac{c}{J_1} \frac{2M}{J_2 \omega^2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8\,c)$$

Ihre drei Wurzeln lassen sich mit sehr guter Näherung folgendermaßen schreiben:

$$p_1 = -2 \frac{M}{J_2 \omega^2} \frac{1}{1 + J_1/J_2}, \qquad p_{\substack{2\\3}} = \frac{p_1}{2} \frac{J_1}{J_2} \pm i \sqrt{\frac{c}{J_1 \omega^2} (1 + J_1/J_2)}.$$

Die Möglichkeit, so einfache Ausdrücke für die Wurzeln der sogenannten determinierenden Frequenzgleichung dritten Grades aufzustellen, ergibt sich daraus, daß die reine Zahl $\left(\frac{M}{J_2 \omega^2}\right)^3 \ll 1$ ist.

Zur Abkürzung setze man die weiterhin viel zu brauchenden folgenden Bezeichnungen fest:

$$A = \frac{M}{J_2 \omega^2}, \qquad B = 1 + \frac{J_1}{J_2}, \qquad C = \frac{c}{J_1 \omega^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9),$$

wo A, B und C reine Zahlen sind.

Dann erscheinen die Wurzelwerte in der Form:

$$p_1 = -2 \frac{A}{B}, \qquad p_{\substack{2\\3}} = \frac{p_1}{2} (B - 1) \pm i \sqrt{B C} = -\frac{A}{B} (B - 1) \pm i \sqrt{B C} \quad . \quad (10).$$

Man erkennt, daß die erste Wurzel einer aperiodischen, gedämpften Schwingung, die zweite und dritte Wurzel einer periodischen, gedämpften Schwingung von einem Dekrement derselben Größenordnung und der Frequenz $\omega \sqrt{B C}$ oder von einer Schwingungsdauer

$$T = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{BC}} = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{(1 + J_1/J_2) \frac{c}{J_1 \omega^2}}}$$

entspricht.

5. Beispiele. Zum Zwecke der Bestimmung der Größenordnung der vorkommenden Ausdrücke sei z. B. vorgelegt ein Motor (Flugmotor) von etwa 250 PS und einer minutl. Tourenzahl von etwa 1400 entsprechend einem Drehmoment $M = 140$ kgm und einer mittleren Winkelgeschwindigkeit $\omega = 150$. Sein ideelles Trägheitsmoment der bewegten Massen sei $J_1 = 1$ kg m sek². Die Antriebwelle habe eine Länge von 2,00 m mit einem Aussendurchmesser von 6 cm und einer Wandstärke von 0,5 cm entsprechend einer mittleren Spannung k_d von 500 kg/qcm, so daß man erhält:

$$c = \frac{G J_p}{l} = 339\,000 \text{ kgcm}, \qquad C = \frac{c}{J_1 \omega^2} = 0{,}1505.$$

Bei direktem Antrieb ($\alpha = 1$) sei das Trägheitsmoment des Propellers $J_2 = 2{,}3$ kg m sek² und bei einem Propeller von halber Tourenzahl des Motors ($\alpha = 2$) sei $\frac{J_{02}}{\alpha^2} = J_2 = 3{,}15$ kg m sek².

Dann wird

$$A = \frac{M}{J_2 \omega^2} = 0{,}0027 \quad \text{bezw.} \quad = 0{,}001975$$

$$B = 1 + J_1/J_2 = 1{,}435 \quad » \quad = 1{,}317.$$

Die Frequenzen $p_1 \omega$, $p_2 \omega$ und $p_3 \omega$ ergeben sich aus:

$$p_1 = -2\frac{A}{B} = -0{,}00376 \text{ bezw. } = -0{,}0030$$

$$p_{2,3} = \frac{p_1}{2}(B-1) \pm i\sqrt{BC} = -0{,}00188 \cdot 0{,}435 \pm i\sqrt{1{,}435 \cdot 0{,}1505}$$

$$\text{bezw. } = 0{,}0015 \cdot 0{,}317 \pm i\sqrt{1{,}317 \cdot 0{,}1505}.$$

Es wird also die Zeit $1/p\omega$, in welcher die Schwingungsamplitude auf $\frac{1}{2{,}718}$ zurückgeht, 1,775 bezw. 2,22 sek für die aperiodische Schwingung und

$$\frac{1}{0{,}00188 \cdot 0{,}435 \cdot 150} = 8{,}13 \text{ sek} \quad \text{bezw.} \quad \frac{1}{0{,}0015 \cdot 0{,}317 \cdot 150} = 14 \text{ sek}$$

für die periodische Schwingung, d. i. die Zeit von 200 bezw. 330 Umdrehungen, was eine sehr schwache Dämpfung bedeutet.

Die Schwingungsdauer andererseits ergibt sich zu

$$T = \frac{2\pi}{150\sqrt{1{,}435 \cdot 0{,}1505}} \quad \text{bezw.} \quad = \frac{2\pi}{150\sqrt{1{,}317 \cdot 0{,}1505}}$$

$$= 0{,}09 \text{ sek} \qquad = 0{,}094 \text{ sek},$$

d. i. die Zeit von etwas weniger als 2 Umdrehungen.

Bei Verbrennungsmotoren für Schiffe sind die Drehzahlen erheblich kleiner (etwa $^1/_4$) und bei gleichem Drehmoment die Gewichte infolge robusterer Bauart erheblich größer, so daß bei gleicher Leistung wie oben C etwa 20 mal so groß bei $\omega = \frac{150}{4}$ ($n \simeq 350$ Touren), $M = 560$ kgm und $J_1 \simeq 20$ wird.

Bei einem Propeller von halber Tourenzahl des Motors wird, mit einem Propellerdurchmesser von etwa 1 m, $J_{02} = \sim 6$ kgmsek², $J_2 = \frac{J_{02}}{a^2} = 1{,}5$ kgmsek².

Es ergibt sich ferner für diesen Fall:

$$A = \frac{M}{J_2 \omega^2} = 0{,}265, \qquad B = 1 + J_1/J_2 = 1 + 13 = 14,$$

$$C = 3, \qquad p_1 = -0{,}038,$$

$$p_1 \omega = 1{,}424, \qquad p_{2,3} = -0{,}247 \pm i\,6{,}48,$$

also Dämpfungszeiten auf $1/e$ der ursprünglichen Amplitude von 0,7 bezw. 0,208 sek, während die Schwingungsdauer 0,026 sek nur etwa den vierten Teil derjenigen des Flugmotors beträgt.

Die Schiffswelle schwingt also viel schneller und mit stärkerer Dämpfung.

6. Erzwungene Schwingungen. Jedenfalls erkennt man, daß die Eigenschwingungen so schnell abklingen, daß es im wesentlichen auf die durch die Störungskräfte erzwungenen Schwingungen ankommt, welche allerdings mittelbar durch die Eigenschwingungseigenschaften beeinflußt sind. Es kommt dabei auf die Lösung der Gl. (1b) an, die wir nochmals schreiben in der Form:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\psi}_1 + \omega^2 C(\psi_1 - \psi_2) &= \mu_1 \cos(k_1 t) \\ \ddot{\psi}_2 + 2\omega A \dot{\psi}_2 - \omega^2 C(B-1)(\psi_1 - \psi_2) &= \mu_2 \cos(k_2 t) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (1\text{b}).$$

Hier ist noch $\frac{2\pi\omega}{\beta_1} = k_1$ und $\frac{2\pi\omega}{\beta_2} = k_2$ gesetzt und ferner der Phasenunterschied ε der Störung zwischen Propeller und Motor fortgelassen, da er bei der zweckmäßig gesonderten Betrachtung der beiden Störungsfunktionen unwesentlich ist und infolge der Linearität der Gleichungen sich einfach beide Einflüsse überlagern. Unter Fortlassung der bald verlöschenden Eigenschwingungen und unter Fortlasssung des Index von k lautet offenbar die Lösung sowohl für $\mu_2 = 0$ (Motorschwankung) als auch für $\mu_1 = 0$ (Propellerschwankung)

$$\psi_1 = a_1 \sin kt + b_1 \cos kt, \qquad \psi_2 = a_2 \sin kt + b_2 \cos kt \quad . \; . \; . \quad (11),$$

in der die Konstanten $a_1\, b_1\, a_2\, b_2$ durch Einsetzung dieser Lösung in die Differentialgleichung (1b) einmal für $\mu_1 = 0$ und einmal für $\mu_2 = 0$ zu bestimmen sind.

Diese Bestimmungsgleichungen lauten dementsprechend:

$$\left.\begin{array}{lll} -k^2 a_1 + \omega^2 C(a_1 - a_2) = 0 & \text{bezw.} & = 0 \\ -k^2 b_1 + \omega^2 C(b_1 - b_2) = \mu_1 & \text{»} & = 0 \\ -k^2 a_2 - k\,\omega\, 2\, A\, b_2 - \omega^2 C(B-1)(a_1 - a_2) = 0 & \text{»} & = 0 \\ -k^2 b_2 + k\,\omega\, 2\, A\, a_2 - \omega^2 C(B-1)(b_1 - b_2) = 0 & \text{»} & = \mu_2 \end{array}\right\} \quad . \; . \quad (12).$$

7. Bedingung für Kraftschlüssigkeit. Es wird nun verlangt, daß das Drehmoment M_c, welches durch das Getriebe hindurchgeht, und dessen Schwankung unvermeidlich ist, wenigstens niemals sein Vorzeichen wechseln soll, d. h. in Gleichungsform, daß:

$$M_c = M_0 + c\,(\psi_1 - \psi_2) > 0 \quad \text{oder} \quad \psi_1 - \psi_2 < \frac{M_0}{c},$$

was nach Gl. (11) geschrieben werden kann: $(a_1 - a_2)\sin k\,t + (b_1 - b_2)\cos k\,t < \frac{M_0}{c}$, eine Bedingung, die die einfachere nach sich zieht:

$$Z^2 = (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 < \frac{M^2}{c^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13).$$

Es kommt also darauf an, aus den Gl. (12) den Wert von $(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2$ zu berechnen.

Wenn man die Abkürzungen einführt:

$$\sigma = \omega^2 C - k^2, \qquad \tau = (\omega^2 B\, C - k^2)\,\frac{k}{2\,A\,\omega}.$$

gewinnt mann in einfacher Weise die Formeln:

$$a_1 - a_2 = \mu_1 \frac{\tau - \sigma \dfrac{k}{2\,A\,\omega}}{\tau^2 + \sigma^2} \text{ bezw.} = \mu_2 \frac{\dfrac{\sigma\,k}{2\,A\,\omega}}{\tau^2 + \sigma^2}, \quad b_1 - b_2 = \mu_1 \frac{\tau \dfrac{k}{2\,A\,\omega} + \sigma}{\tau^2 + \sigma^2} \text{ bezw.} = -\mu_2 \frac{\dfrac{\tau\,k}{2\,A\,\omega}}{\tau^2 + \sigma^2}.$$

Hierin bedeutet wieder die erste Spalte der rechten Seite Störung vom Motor her, die zweite Spalte Störung vom Propeller her.

Beachtet man, daß $\omega^2 B C = q^2$ das Quadrat der Eigenschwingungsfrequenz des Systems, $\omega^2 C = r_1^2$ das Quadrat der Eigenfrequenz von Welle und Motormasse ohne Propeller bedeutet und $2A\omega$ sich durch den Dämpfungsexponenten s der periodischen Eigenschwingung ausdrücken läßt in der Form $2A\omega = +2s\,(1 + J_2/J_1)$, so kann man die Bedeutung von σ und τ anschaulich machen durch die Formeln:

$$\sigma = r_1^2 - k^2, \qquad \tau = (q^2 - k^2)\,\frac{k}{2\,s\,(1 + J_2/J_1)}.$$

Der kritische Ausdruck Z^2 für den Zahndruck wird somit:

$$Z^2 = \frac{\mu_1^2}{\sigma^2 + \tau^2}\left(1 + \frac{k^2}{4\,A^2\,\omega^2}\right) \text{ bezw.} = \frac{\mu_2^2}{\sigma^2 + \tau^2}\,\frac{k^2}{4\,A^2\,\omega^2} \quad . \; . \; . \; . \quad (13\,\text{a}).$$

Es ist nun zweckmäßig, die Ungleichförmigkeiten oder Schwankungen der hineingeschickten bezw. herausgegebenen Drehmomente durch die Verhältnisse $U_1 = \frac{\mu_{0\,1}}{M_0}$ und $U_2 = \frac{\mu_{0\,2}}{M_0}$ auszudrücken. Gl. (13a) für die Kraftschlüssigkeit verwandelt sich dann in:

$$\left.\frac{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}}{r_1^2 \sqrt{1 + \dfrac{k^2}{4\,A^2\,\omega^2}}} > U_1\,, \qquad \frac{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}}{r_2^2 \cdot \dfrac{k}{2\,A\,\omega}} > U_2 \right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13\,\text{b}).$$

Diese Bedingungen lassen sich nun noch sehr vereinfachen und veranschaulichen, wenn man die Größenordnung der auftretenden Zahlen beachtet.

Man kann zunächst feststellen, daß $\frac{k^2}{4\,A^2\,\omega^2} \gg 1$, denn im ersten Beispiel war $A \simeq 2 \cdot 10^{-3}$, $\omega = 150$, während $\frac{k}{\omega} = \frac{2\,\pi}{\beta}$, also $\frac{k}{2\,A\,\omega} = \frac{2\,\pi}{\beta\, 2\,A} = \sim \frac{1}{A} \simeq 500$, wobei angenommen wurde, daß bei jeder Umdrehung zwei Störungsmaxima auftreten. Infolge dieser

Größenordnung von $\frac{k}{2A\omega}$ nehmen beide Bedingungen sowohl für Störung von Motorseite als von Propellerseite dieselbe Form an, nämlich:

$$\frac{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}}{r^2\frac{k}{2A\omega}} > U \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13\,c).$$

8. Resonanzfall. Bevor diese Bedingung weiter zahlenmäßig diskutiert wird, möge zunächst der Fall der Resonanz betrachtet werden. Resonanz tritt ein, wenn die Frequenz q der Eigenschwingung gleich der Frequenz k der erzwungenen Schwingung wird, also wenn:

$$\tau = 0, \qquad \sigma = r^2 - k^2 = r^2\left[1-\left(\frac{k}{r}\right)^2\right].$$

Gl. (13b) ergibt damit für Störung von Motorseite:

$$\frac{2A\omega}{k}\left[1-\left(\frac{k}{r}\right)^2\right] = \frac{2s}{k}\left[1-\left(\frac{k}{r}\right)^2\right]\left(1+\frac{J_2}{J_1}\right) > U_1$$

und für Störung von Propellerseite her:

$$\frac{J_2}{J_1}\cdot\frac{2A\omega}{k}\left[1-\left(\frac{k}{r}\right)^2\right] = \frac{2s}{k}\left[1-\left(\frac{k}{r_1}\right)^2\right]\frac{J_2}{J_1}\left(1+\frac{J_2}{J_1}\right) > U_2.$$

Man kann also auch im Falle der Resonanz, der freilich aus anderen Gründen vorsichtig vermieden werden muß, durch Wahl der Dämpfung und der »Teilfrequenz« $r_1^2 = \frac{c}{J_1}$ die Kraftschlüssigkeit des Getriebes erzielen.

In den oben gewählten Beispielen ist man jedenfalls weit vom Resonanzpunkt entfernt, da $\frac{k^2}{q^2} = \frac{4\pi^2}{\beta^2}\cdot\frac{1}{BC} = 20$ bezw. 0,1 ist. Bei Vermeidung der Resonanz überwiegt immer das Glied τ^2 gegen σ^2 wegen des großen Faktors $\left(\frac{k}{2A\omega}\right)^2$ von τ und man erhält die folgende einfache Formel als Bedingung der Kraftschlüssigkeit für Störung von Motorseite her:

$$\frac{\tau}{\frac{c}{J_1}\cdot\frac{k}{2A\omega}} = \frac{q^2}{r_1^2}\left(1-\frac{k^2}{q^2}\right) > U_1,$$

solange man unter dem Resonanzpunkt ist, und nach Ueberschreitung des Resonanzpunktes bei steigender Drehzahl:

$$\frac{q^2}{r^2}\left(\frac{k^2}{q^2}-1\right) > U_1.$$

9. Andere Form der Bedingungen. Die Bedingungen sind also ausgedrückt in den dem System eigentümlichen Frequenzen, wobei, wie man sieht, anders als im Resonanzfall, die Dämpfung ganz herausgefallen ist. Die Bedingungen können aber auch unter Benutzung der oben mitgeteilten Werte von q^2, r^2 und s, in den geometrischen Daten des Systems, geschrieben werden wie folgt:

$$\left(1+\frac{J_1}{J_2}\right)\left(1-\frac{4\pi^2 J_1\omega^2}{\beta^2 c(1+J_1/J_2)}\right) > U_1 \quad \text{bezw.} \quad \left(1+\frac{J_1}{J_2}\right)\left(\frac{4\pi^2\cdot J_1\omega^2}{\beta^2 c(1+J_1/J_2)}-1\right) > U_1.$$

Für Störung von Propellerseite her erhält man entsprechend in den geometrischen Daten der Aufgabe:

$$\left(1+\frac{J_2}{J_1}\right)\left(1-\frac{4\pi^2\cdot J_1\omega^2}{\beta^2 c\cdot(1+J_1/J_2)}\right) > U_2 \quad \text{bezw.} \quad \left(1+\frac{J_2}{J_1}\right)\left(\frac{4\pi^2\cdot J_1\omega^2}{\beta^2\cdot c(1+J_1/J_2)}-1\right) > U_2.$$

Die Formeln erlauben also für jede erwartete verhältnismäßige Schwankung $U = \frac{\Delta M}{M}$, für gegebene Tourenzahl $n = \omega\frac{30}{\pi}$ und Schwankungswinkel β, die Trägheitsmomente J_1 und J_2 des Motors und des Propellers und die elastische Nachgiebigkeit $1/c$ der Welle so zu wählen, daß die Kraftschlüssigkeit des Getriebes gewahrt bleibt.

Befindet man sich weit unterhalb des Resonanzpunktes, d. h $k \gg q$ (Störungsfrequenz groß gegen Eigenfrequenz), so vereinfachen sich die Formeln noch weiter und man kann schreiben:

$$\frac{k^2}{r_1^2} = \frac{4\pi^2}{\beta^2} \cdot \frac{J_1 \omega^2}{c} > U_1 \quad \text{und} \quad \frac{k^2}{r_2^2} = \frac{4\pi^2}{\beta^2} \cdot \frac{J_2 \omega^2}{c} > U_2 \quad . \quad . \quad . \quad (14).$$

In diesem Falle sollte also die lebendige Kraft der Motormassen bezw. der Propellermassen mindestens ein gewisses Vielfaches der Steifigkeit c der Welle sein, wobei die Massen des Getriebes dort hinzuzurechnen sind, wo sie direkt gekuppelt sind.

Befindet man sich weit oberhalb des Resonanzpunktes $k \ll q$ (Störungsfrequenz klein gegen Eigenfrequenz), so nehmen die Formeln die noch einfachere Gestalt an:

$$1 + \frac{J_1}{J_2} > U \quad \text{bezw.} \quad 1 + \frac{J_2}{J_1} > U_2.$$

Die Störung von Motorseite her verlangt also Ueberwiegen der Motorträgheit, von Propellerseite her Ueberwiegen der Propellerträgheit, zwischen welchen Forderungen ein Kompromiß geschlossen werden muß.

10. Beispiele. Der Ungleichförmigkeitsgrad des Drehmoments $U = \frac{\Delta M}{M}$ muß natürlich aus den Betriebseigenschaften der Motoren rechnerisch oder versuchsmäßig vorher bestimmt werden. Wir entnehmen z. B. dem »Handbook of Modern Aeronautics« von Arthur W. Judge, London 1919, S. 361, die folgende Zusammenstellung der Ungleichförmigkeitsgrade U_1:

Explosionsmotoren	Einzylinder	7,6	Dampfmaschinen	Einzylinder	1,1
	Zweizylinder	3		Zweizylinder	0,4
	Vierzylinder	1		Verbund, Kurbeln unter 135° mit 3 Lagern für Kurbelwelle	0,94
	Sechszylinder	0,4			

Die oben gerechneten Beispiele mögen auch hier durchgeführt werden.

Es war dort für den Flugmotor $k \gg q$, $C_1 = \frac{c}{J_1 \omega^2} = 0{,}1505$ und $C_2 = \frac{c}{J_2 \omega^2} = 0{,}05$. Mit $\frac{\beta}{2\pi} = {}^1/_2$ ergibt sich also nach Gl. (14a): 7 bezw. $20 > \frac{U}{4}$, was immer erfüllt ist.

Für den Schiffsmotor hatte man: $k \ll q$, $1 + \frac{J_1}{J_2} = 14$, $1 + \frac{J_2}{J_1} = 1{,}077$. Eine Gefahr liegt also nach den Gl. (14b) bei dem hoch angenommenen Trägheitsmoment des Motors nur gegenüber Propellerungleichförmigkeit vor.

Auch für den Flugmotor würde die Kraftschlüssigkeit bedenklich werden können, wenn c erheblich kleiner, also etwa die Welle wesentlich steifer, z. B. kürzer sein würde, nämlich statt 200 cm lang nur ${}^{200}/_{30} = \sim 6$ cm lang, weil dann $c = \frac{G J_p}{l}$ soviel größer sein würde.

11. Weiterführung der Aufgabe. Im vorhergehenden sind sehr einfache Bedingungen für den ruhigen Gang von Getrieben gegeben worden für den Fall, daß die Massen des Getriebes selbst keine unabhängige Schwingung ausführen, sondern entweder zu den Motor- oder zu den Propellermassen hinzugerechnet werden können. Diese Bedingungen können auch sinngemäß für andere Antriebe, z. B. Automobilantriebe, angewendet werden.

Sind dagegen die Getriebemassen nach beiden Seiten hin durch elastische Zwischenglieder, z. B. Wellenstücke vom Motor und vom Propeller getrennt oder wirken zwei Motoren auf eine Propellerwelle, so tritt eine neue Variable in den Schwingungsgleichungen auf, und die Theorie und ihre Ergebnisse bedürfen einer Erweiterung. 319

ZUSAMMENFASSENDE BERICHTE

Die Verstreckung (Anamorphose) und die nomographische Ordnung.

Von **P. LUCKEY** in Elberfeld.

1. Einleitung. Daß sich die Kunst des Entwerfens graphischer Rechentafeln in den letzten Jahrzehnten zu einem selbständigen Zweige der angewandten Mathematik entwickelt hat, wie dies die darstellende Geometrie etwa ein Jahrhundert früher tat, gibt sich nach außen zu erkennen durch das Erscheinen größerer zusammenfassender Werke, wie derjenigen von d'Ocagne[1]) und Soreau[2]), innerlich dadurch, daß man versucht, die früheren Einzelleistungen durch allgemeine Methoden und Theorien zusammenzufassen, zu vertiefen und zu erweitern. Bei diesen allgemeinen Untersuchungen handelt es sich einmal darum, die verschiedenen denkbaren Formen von Rechentafeln abzuleiten; unter »Form« verstehe ich hierbei die geometrische Struktur der Rechentafel im Verein mit der geometrischen Natur der Ablesevorschrift. Diese Seite der allgemeinen Behandlung kann man als Morphologie der Rechentafeln bezeichnen. So hat d'Ocagne eine »allgemeine morphologische Theorie« aufgestellt, in der er, von einem Begriff des »allgemeinsten Nomogramms«[3]) ausgehend, die einzelnen Sondertypen entwickelt. Eine solche allgemeine Morphologie hat ihren Wert als systematische Zusammenfassung. Zur Entdeckung neuer Typen hat sie nicht geführt. Diese sind vielmehr stets an Einzelproblemen individuell zur Entdeckung gekommen.

Es ist nun nicht schwer, zu jedem einzelnen so aufgestellten Tafeltypus nach analytisch-geometrischen Methoden die Gleichung aufzustellen, die sich durch ihn darstellen läßt. Für den bekannten Typ der Fluchtentafeln, bei dem drei Punkte der Ebene, deren jeder einer Leiter angehört, auf einer Geraden liegen sollen, ist z. B. diese Bedingung das Verschwinden einer Determinante dritter Ordnung. Viel schwerer ist nun aber — und damit kommen wir zu der anderen, wichtigeren Richtung, die die allgemeinen Untersuchungen genommen haben — die allgemeine Beantwortung der Frage: Wie erkennt man, ob eine beliebig vorgelegte Gleichung durch einen bestimmten Tafeltyp darstellbar ist, ob sie sich also auf die Gleichungsform dieses Typs bringen läßt, und wie stellt man, wenn es möglich ist, diese Form her? Ganz abgesehen von der theoretischen Bedeutung dieser zentralen Frage der Nomographie ist ihre Beantwortung auch praktisch wichtig, denn gerade bei verwickelteren Formeln entfaltet die Nomographie ihren Wert, und bei solchen Formeln ist nicht ohne weiteres erkennbar, welche Tafelarten möglich, welche vorteilhaft sind. Für den Typus der aus Geraden bestehenden Netztafel und den ihm dual entsprechenden Typus der Fluchtentafel, der bei der ganzen Entwicklung im Vordergrund des Interesses gestanden hat, nennt man die Herstellung der zur Vertafelung erforderlichen Form der Gleichung die »Anamorphose« (Verstreckung) der Gleichung. Nur für diesen Typus hat man allgemeine Methoden ausgebildet, nach denen entschieden werden kann, ob sich eine vorgelegte Gleichung auf die erforderliche Form bringen läßt, ob sie also anamorphosierbar (verstreckbar) ist. Die Frage nach der Anamorphosierbarkeit und nach der Ausführung der Verstreckung hat zu einer Einteilung der vorgelegten Gleichungen nach dem Gesichtspunkt der nomographischen Ordnung geführt. Verstreckung und nomographische Ordnung sind deshalb die beiden wichtigen Begriffe, die wir zu entwickeln haben und die uns leiten müssen, wenn wir im folgenden einen Ueberblick über die hauptsächlichen Ergebnisse der theoretischen

---

[1]) M. d'Ocagne, Traité de Nomographie, Paris 1899. Zweite, umgearbeitete Auflage, Paris 1921.

[2]) R. Soreau, Nomographie ou Traité des Abaques. 2 Bde, Paris 1921. Die umfangreichen älteren Arbeiten von Soreau in den Mém. et comptes rendus de la Soc. des Ing. civils, 1901, 1906, 1914 kann man als eine erste Auflage des Hauptwerks betrachten. Sie mögen für manchen eher zugänglich sein als dieses. In Deutschland vermittelten die Bekanntschaft mit der Nomographie unter anderen Fr. Schilling durch die Schrift »Ueber die Nomographie von M. d'Ocagne«, Leipzig 1900 und R. Mehmke durch verschiedene Aufsätze (vergl. besonders Ztschr. f. Math. u. Phys. 44 [1899], S. 56 bis 62) und durch seinen Artikel »Numerisches Rechnen« in der Enc. d. math. Wiss., I., 1902, der zahlreiche weitere Literaturangaben enthält.

[3]) Vergl. diese Zeitschr. 3 (1923), S. 46.

Arbeiten auf dem Gebiete der Nomographie geben wollen. Die beste große Zusammenfassung dieser Ergebnisse findet man in dem schon erwähnten Werke von Soreau, aus dem auch die folgende kurze Darstellung den Stoff hauptsächlich geschöpft hat[1]). Soreau hat selbst wesentliche Beiträge zur Ausbildung und Vereinfachung der Methoden geliefert.

In der Bezeichnungsweise folgen wir d'Ocagne und Soreau. Insbesondere schreiben wir statt $f_1(z_1)$ abgekürzt f_1, statt $f_2(z_2)$ abgekürzt f_2. f_1 und f_2 sind also, trotz der Wahl desselben Buchstabens f, verschiedene Funktionen von z_1 bezw. z_2. Ebenso schreiben wir f_{12} für $f_{12}(z_1, z_2)$ oder f_{123} für $f_{123}(z_1, z_2, z_3)$. Diese vereinfachte Schreibweise macht die sonst oft unruhigen Gleichungsbilder übersichtlicher.

2. Das Problem und die Bedeutung der Verstreckung. Fast alle Rechentafeln für Gleichungen mit mehr als drei Veränderlichen sind Verkoppelungen von solchen mit drei Veränderlichen oder Verallgemeinerungen solcher Tafeln. Wir können uns deshalb, so wichtig auch gerade die Vertafelung von Gleichungen mit mehr als drei Veränderlichen ist, zunächst auf Tafeln für Gleichungen mit drei Veränderlichen z_1, z_2, z_3 beschränken. Jede beliebige derartige Gleichung

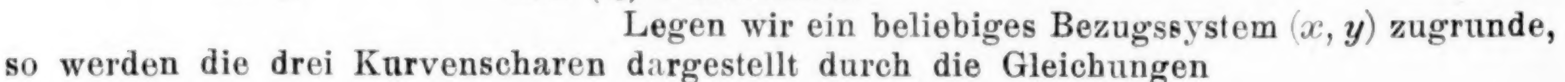


$$F_{123} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

ist durch eine Netztafel (Abb. 1) darstellbar. Wir können dabei sogar für zwei der Veränderlichen, etwa für z_1 und z_2, ganz beliebige Kurvenscharen wählen. Durch den Schnittpunkt der Kurven (z_1) und (z_2) geht dann eine Kurve der dritten Schar, deren Bezifferung (z_3) aus (1) berechnet werden kann. Durch Verbindung der Punkte mit gleichen z_3-Werten ließe sich die Kurvenschar (z_3) in das Netz der Scharen (z_1) und (z_2) einzeichnen.

Abb. 1

Legen wir ein beliebiges Bezugssystem (x, y) zugrunde, so werden die drei Kurvenscharen dargestellt durch die Gleichungen



$$\left.\begin{array}{ll} (z_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . & \varphi_1(x, y, z_1) = 0 \\ (z_2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . & \varphi_2(x, y, z_2) = 0 \\ (z_3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . & \varphi_3(x, y, z_3) = 0 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Die gegebene Gleichung (1) ist das Ergebnis der Elimination von x und y aus diesen drei Gleichungen. Hat man die Funktionen φ_1 und φ_2 (und damit die Kurvenscharen (z_1) und (z_2)) beliebig gewählt, so ergibt sich φ_3 (und damit die Kurvenschar (z_3)) durch Elimination von z_1 und z_2 aus den Gleichungen (1), (z_1) und (z_2). Während in der mittelalterlichen Nomographie das Polarkoordinatennetz eine große Rolle spielte, war in der neueren Nomographie der natürliche Entwicklungsgang der, daß die Gleichungen (z_1) und (z_2) die einfachste Form

$$\left.\begin{array}{ll} (z_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . & x = z_1 \\ (z_2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . & y = z_2 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

annahmen, wobei x, y rechtwinklige kartesische Koordinaten waren. Noch heute sind diese »kartesischen Rechentafeln« die verbreitetsten, denn es ist in sehr vielen Fällen am bequemsten, als (z_1)- und (z_2)-Scharen die Linien eines vorgedruckten Millimeternetzes zu benutzen, in das die (z_3)-Kurven, die häufig empirischer Natur sind, eingetragen werden können.

Das Bestreben, auch die dritte Kurvenschar (z_3) zu einer Schar von Geraden zu »verstrecken«, führte Lalanne 1843[2]) dazu, als (z_1, z_2)-Netz die Parallelenscharen

$$\left.\begin{array}{ll} (z_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . & x = \log z_1 \\ (z_2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . & y = \log z_2 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

zu wählen. Diese Umformung nannte er »Anamorphose«. Allgemeiner können wir sogleich

$$\left.\begin{array}{ll} (z_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . & x = f_1 \\ (z_2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . & y = f_2 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

[1]) Meinem Kriegskameraden Herrn E. Schwarzländer, der mir das Werk von Soreau von Mailand aus zum Geschenk machte und dadurch den Anstoß zu dieser Arbeit gab, danke ich auch an dieser Stelle herzlich.

[2]) Mémoire présenté à l'Ac. des Sciences en 1843 und Mémoire sur les Tables graphiques et la Géométrie anamorphique, Ann. des Ponts et Chaussées, 11 (1846). Ueber ein älteres, deutsches Beispiel einer Anamorphose vergl. Mehmke, Ztschr. f. Math. u. Phys. 48 (1903), S. 135.

ansetzen. Hier ist das (z_1, z_2)-Netz immer noch ein Netz von zwei Parallelenscharen, ein »kartesisches Netz«, aber die Abstände der Geraden sind nicht mehr gleich, sondern ändern sich nach dem Gesetz der Funktionen f_1 und f_2. Diese Verstreckung wird heute als »kartesische Anamorphose« bezeichnet und findet bekanntlich weitgehende Anwendung in der Praxis, wie das Vorhandensein der logarithmischen Papiere, Sinuspapiere usw. beweist. Auch die »Sechsecktafeln« sind Anwendungen einer speziellen kartesischen Verstreckung.

Als Geraden haben die (z_3)-Linien die Gleichung

$$(z_3) \quad \ldots\ldots \quad f_3\, x + g_3\, y + h_3 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (6).$$

Setzt man hier x und y nach den beiden vorhergehenden Gleichungen ein, so sieht man, daß eine Gleichung, die durch eine kartesische Tafel darstellbar ist, auf die Form

$$f_1 f_3 + f_2 g_3 + h_3 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

zu bringen sein muß.

Der Schritt von der kartesischen zur »allgemeinen Anamorphose« liegt nun nahe. Statt die (z_1)-Schar und die (z_2)-Schar als Parallelenscharen anzunehmen, nimmt man sie jetzt als beliebige Geradenscharen an, so daß sie vor der (z_3)-Schar, die ja auch eine beliebige Geradenschar sein soll, keinen Vorzug mehr haben. Diesen Schritt tat Massau[1]) 1884. Jetzt haben also, auf ein kartesisches Koordinatensystem bezogen, die drei Geradenscharen die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{lll} (z_1) & \ldots\ldots & x f_1 + y g_1 + h_1 = 0 \\ (z_2) & \ldots\ldots & x f_2 + y g_2 + h_2 = 0 \\ (z_3) & \ldots\ldots & x f_3 + y g_3 + h_3 = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (8).$$

Die Elimination von x und y aus diesen drei Gleichungen ergibt die »Massausche Bedingungsgleichung«

$$\begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9),$$

und die Gleichung (1) läßt sich also dann und nur dann durch eine Netztafel aus lauter Geraden, die wir kurz eine »Geradentafel« nennen wollen, darstellen, wenn sie — die Gleichung (1) — oder eine ihr äquivalente Gleichung auf die Form (9) gebracht werden kann. Diese analytische Umwandlung der Gleichung (1) in die Form (9) wird als die »Anamorphose der Gleichung (1) bezeichnet[2]). Der ursprünglich geometrische Begriff der Anamorphose oder Verstreckung der Kurven einer Rechentafel ist damit zu einem analytischen Begriff ausgeprägt worden. Ich gebrauche auch das deutsche Wort »Verstreckung« in diesem analytischen Sinne und sage, »eine Gleichung wird verstreckt«, wenn sie auf die Form (9) gebracht wird. Von »verstreckbaren« und »unverstreckbaren« Gleichungen spricht sich viel besser als von »anamorphosierbaren« und »nicht-anamorphosierbaren« Gleichungen. Häufig gebraucht man auch den Ausdruck »Trennung der Variablen«, insofern die Veränderlichen z_1, z_2, z_3 der Gleichung (1) in der Gleichung (9) so von einander geschieden sind, daß die erste Zeile nur von z_1, die zweite nur von z_2 und die dritte nur von z_3 abhängige Funktionen enthält, jedoch spricht man auch bei Herstellung anderer Formen als (9) von einer Trennung der Variablen.

Wie kommt es nun, daß sich gerade die Verstreckung zum zentralen Problem der heutigen Nomographie entwickeln konnte? Mochte zunächst für Lalanne, und mag noch heute, der Ersatz von Kurven durch gerade Linien als erheblicher Vorteil für die bequeme praktische Herstellung der Rechentafeln erscheinen, so gewann doch die Anamorphose der Gleichungen ihre eigentliche hohe Bedeutung erst dadurch, daß man

[1]) J. Massau, Mém. sur l'Intégration graphique, Ann. de l'Assoc. des Ing. sortis des Écoles spéciales de Gand, 1878, 84, 86, 87, 90, 1900.

[2]) Ich halte es für zweckmäßig, daß die Bezeichnung »Anamorphose« auf die oben angegebene, von Soreau gewählte Bedeutung beschränkt bleibe. H. Schwerdt (Physik. Ztschr. 18, 1917, S. 45 bis 53) dehnt in Anlehnung an d'Ocagne den Begriff als »allgemeine Anamorphose« weit aus auf stetige Abbildungen von Netztafeln. Die Gleichung der Wurfparabelschar, die er als Erläuterung seiner »allgemeinen Anamorphose« behandelt, ist in unserem Sinne nicht anamorphosierbar. Die Netztafel, die Schwerdt für diese Formel entwirft, besteht denn auch nicht aus lauter Geraden, sondern ist eine Tafel aus Geraden- und Kreisscharen, von der Art, für die d'Ocagne und Soreau die kanonischen Formen aufgestellt haben.

zwei fundamentale Prinzipien der neueren Geometrie auf die Geradentafeln anwenden konnte, nämlich die Dualität und die Projektivität. Vermöge der Dualität kann man an die Stelle der drei bezifferten Geradenscharen drei bezifferte Punktreihen (Skalen, Leitern) setzen, wobei drei Werte z_1, z_2, z_3 dann und nur dann der Gleichung genügen, wenn die ihnen entsprechenden Leiterpunkte auf einer Geraden, einer »Flucht«, liegen, die etwa durch einen gespannten Faden verwirklicht wird. Die Vorteile der so entstehenden »Fluchtentafeln« gegenüber den Netztafeln sollen hier nicht aufgezählt werden. Dank dem Prinzip der Projektivität kann ferner das Nomogramm, sei es nun eine Geradentafel, sei es eine Fluchtentafel, in eine zweckmäßige und schöne Form gebracht werden. Reicht z. B. beim ersten Entwurf der nutzbare Teil einer Leiter bis ins Unendliche, so kann er durch projektive Abbildung ins Endliche herangeholt werden. Fällt der Maßstab einer Leiter in einem gewissen Bereich zu klein aus, so kann er durch eine projektive Umformung vergrößert werden. In den meisten Fällen kann man bei einer Dreileiterntafel erreichen, daß die Endpunkte der nutzbaren Bereiche der beiden (im allgemeinen krummlinigen) Leitern, die den beiden Variablen entsprechen, welche gewöhnlich die unabhängigen sind, die Ecken eines Rechtecks bilden und daß die Leiter der abhängigen Veränderlichen zwischen ihnen liegt. Für diese Formung der Rechentafel sind ebenso wie für die duale Uebersetzung sowohl zeichnende wie rechnende Verfahren ausgebildet worden. Analytisch kommt die Formbarkeit dadurch zum Ausdruck, daß die Determinante der Gleichung (9) mit einer von null verschiedenen Determinante

$$\delta = \begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ \lambda' & \mu' & \nu' \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' \end{vmatrix} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

multipliziert werden kann. Dadurch, daß man die 8 in dieser Determinante vorkommenden Parameter — es kommt nur auf die Verhältnisse der λ, μ usw. an — passend bestimmt, kann man die Determinante von (9) gewissermaßen zurechtkneten. Diese Formung der Determinante von (9) wird man natürlich oft durch die bekannten Operationen mit ihren Vertikalreihen ausführen.

Es ist ein anziehendes Schauspiel, daß allgemeine Theorien, wie hier diejenigen der neueren Geometrie, die bis dahin vielfach ein Dasein in theoretischer Schönheit fristeten, unmittelbare praktische Verwertung finden. D'Ocagne war es, der, befruchtet durch die geometrischen Schöpfungen von Chasles, sowohl die Methode der Fluchtentafeln, wie auch die projektive Formung der Rechentafeln zuerst ausbildete.

Was die analytische Darstellung der Fluchtentafeln betrifft, so bedient sich d'Ocagne eines speziellen Linienkoordinatensystems, der Parallelkoordinaten[1]), vermöge deren jede Leiter durch eine Gleichung von der Form der Gleichungen (8) dargestellt wird. Man braucht in diesen Gleichungen nur die Punktkoordinaten x und y durch die Linienkoordinaten u und v zu ersetzen. Wir möchten indessen für Theorie und Praxis entschieden der von Soreau verwandten Parameterdarstellung der Leitern

$$L_1 = \begin{cases} x = \varphi_1 \\ y = \psi_1 \end{cases} \qquad L_2 = \begin{cases} x = \varphi_2 \\ y = \psi_2 \end{cases} \qquad L_3 = \begin{cases} x = \varphi_3 \\ y = \psi_3 \end{cases} \quad . \; . \; . \; . \quad (11)$$

den Vorzug geben. Nach dieser Darstellung läßt sich jede Leiter ohne weiteres punktweise in ein rechtwinkliges Koordinatennetz einzeichnen. Der mit $z_1 = \gamma_1$ bezifferte Leiterpunkt der Leiter L_1 wird z. B. erhalten, indem man $z_1 = \gamma_1$ in die Gleichungen $x = \varphi_1$, $y = \psi_1$ einsetzt. Wenn geometrische Konstruktionsmethoden versagen, wird man zu dieser oft mühsamen, aber genauen punktweisen Errechnung und Konstruktion der Leiter greifen können. Steht kein Koordinatograph zur Verfügung, so kann man die Punkte durch einen Bogen Millimeterpapier durchstechen, unter dem der Zeichenbogen ausgebreitet ist.

Die Bedingung, daß die drei mit z_1, z_2, z_3 bezifferten Punkte der Leitern (11) auf einer Geraden liegen, ist

$$\begin{vmatrix} \varphi_1 & \psi_1 & 1 \\ \varphi_2 & \psi_2 & 1 \\ \varphi_3 & \psi_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12).$$

---

[1]) Auf die Parallelkoordinaten hat wohl zuerst Chasles aufmerksam gemacht (Correspondance de Quetelet A. VI, S. 81). Ihre Theorie entwickelten vor d'Ocagne Unverzagt (Jahresber. Realgymn. Wiesbaden von Ostern 1870 bis Ostern 1871) und Schwering (Ztschr. f. Math. u. Phys. 21, S. 278). Vergl. Rudio, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 44, Suppl. (1899).

Sie ist von der Form (9), und man kann umgekehrt, wenn man eine vorgelegte Gleichung verstreckt, d. h. auf die Form (9) gebracht hat, auch die Form (12) herstellen, indem man durch geeignete Operationen mit den Vertikalreihen die Glieder einer Vertikalreihe von (9), falls sie es noch nicht waren, von null verschieden macht und dann die Zeilen der Determinante durch die betreffenden Glieder dieser Vertikalreihe dividiert. Sind in (9) die h_i von null verschieden, so läßt sich die Parameterdarstellung

$$x = \frac{f_i}{h_i},\ y = \frac{g_i}{h_i} \qquad (13)$$

der Leitern aus der Determinantendarstellung unmittelbar herauslesen.

3. Die Lösung des Verstreckungsproblems für beliebige Gleichungen. Die Lösung der Aufgabe, eine beliebige vorgelegte Gleichung

$$F_{123} = 0 \qquad (1)$$

zu verstrecken, vollzog sich in drei Schritten. De Saint Robert[1]) fand 1871 als notwendige und hinreichende Bedingung für die Herstellung der Form

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 0 \qquad (2)$$

die Gleichung

$$\frac{\partial^2 \log r_{12}}{\partial z_1 \partial z_2} = 0 \qquad (3),$$

wobei

$$r_{12} = \frac{\partial F_{123}}{\partial z_1} : \frac{\partial F_{123}}{\partial z_2} \qquad (4).$$

Soreau[2]) leitet diese Bedingung (3) auf folgende einfache Weise ab. Aus (1) bildet er

$$F_1' dz_1 + F_2' dz_2 + F_3' dz_3 = 0 \qquad (5),$$

wo F_i' die partielle Ableitung von F_{123} nach z_i bedeutet. Ebenso bildet er aus (2):

$$\varphi_1' dz_1 + \varphi_2' dz_2 + \varphi_3' dz_3 = 0 \qquad (6).$$

Da zwei der drei Veränderlichen z_1, z_2, z_3 als unabhängige zu betrachten sind, so folgt aus (5) und (6)

$$F_1' : F_2' : F_3' = \varphi_1' : \varphi_2' : \varphi_3' \qquad (7),$$

also

$$r_{12} = \frac{F_1'}{F_2'} = \frac{\varphi_1'}{\varphi_2'} \qquad (8).$$

Aus (8) folgt sofort de Saint Roberts Bedingung (3), die auch hinreichend ist, weil sich durch Integration die Form (2) herstellen läßt.

Die ganz spezielle, aber sehr oft vorkommende Verstreckung auf die Form (2) liefert diejenigen kartesischen Geradentafeln, bei denen auch die dritte Geradenschar aus parallelen Geraden besteht. Die gewöhnlichen Sechsecktafeln gehören in diese Gruppe, der auf der Seite der Fluchtentafeln die Tafeln mit drei geradlinigen parallelen Skalen entsprechen. Auch den gewöhnlichen Rechenschiebern liegt bekanntlich die Gleichungsform (2) zugrunde, und die Frage der Darstellbarkeit durch einen Rechenschieber war es auch, die de Saint Robert zur Lösung der Aufgabe veranlaßte.

Den zweiten Schritt taten Massau (1884) und Lecornu (1885)[3]). Sie vollzogen die Reduktion beliebiger Gleichungen auf die Form

$$f_1 f_3 + f_2 g_3 + h_3 = 0 \qquad (9),$$

welche, wie wir schon sahen, für die kartesischen Geradentafeln und die zu ihnen dualen, aus zwei parallelen geradlinigen Leitern und einer krummlinigen Leiter bestehenden Fluchtentafeln kennzeichnend ist. Während Massau zu dieser »kartesischen Anamorphose« 4 und Lecornu noch 3 Integrationen nötig hatte, haben Gronwall und Soreau die Lösung weiter vereinfacht. Gronwall wendet gar keine Integrationen an, während Soreaus Verfahren zwei Integrationen erforderlich macht, aber wohl bequemer zum Ziele führt als das Verfahren von Gronwall.

---

[1]) Memorie della R. Accademia di Torino, 1871, S. 53.

[2]) Comptes rendus de l'Ac. des Sc., Novembre 1912.

[3]) Comptes rendus de l'Ac. des Sc., 1886, S. 815. Auch A. Adler (Sitzungsber. d. Kais. Akad. der Wiss. in Wien 94, 1886) leitet fast gleichzeitig die Differentialbedingungen der kartesischen Verstreckung ab und spricht dabei das Prinzip der Fluchtentafeln klar und allgemein aus.

Das allgemeine Problem der Verstreckung, das Massau 1884 stellte und bei dem also verlangt wird, die Gleichung $F_{123} = 0$ auf die Form

$$|f_i \; g_i \; h_i| = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

zu bringen, löste nach Vorarbeiten von Duporcq (1898)[1] und Boulad[2] im Jahre 1912 Gronwall[3] aus Chicago. Er leitete als notwendige und hinreichende Bedingung für die allgemeine Verstreckung die Existenz eines gemeinsamen Integrals zweier partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung ab, die sich aus der gegebenen Gleichung bilden lassen.

Wenn diese Untersuchungen, die wir hier nicht wiedergeben können, auch das Problem der Anamorphose gelöst haben und wenigstens theoretisch einen Weg zu ihrer Ausführung weisen, so ist doch insbesondere die Aufstellung und Lösung der Differentialgleichungen in der allgemeinen Lösung Gronwalls so verwickelt und schwierig, daß diese Untersuchungen nicht nur für die Praxis ohne Bedeutung sind, sondern auch keinen unmittelbaren Nutzen für den theoretischen Ausbau der wichtigsten Verfahren im einzelnen gewähren. Das liegt daran, daß die gegebene Gleichung in der Form

$$F_{123} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

viel zu allgemein und umfassend angenommen ist. Dadurch, daß man statt ihrer speziellere Formen annahm, Formen, die gewissermaßen der Form $|f_i \; g_i \; h_i|$, auf die die linke Seite gebracht werden soll, mehr entgegenkommen, dabei aber so gebaut sind, daß die gebräuchlichen Formeln der Technik in ihnen enthalten sind, ist man zu theoretisch und praktisch brauchbaren Verstreckungsmethoden gekommen. Von solcher Art ist die Gleichungsform, deren Verstreckung wir nun betrachten wollen.

4. Die Eliminationsregel. Es hat sich wohl noch keine Formel der Technik gefunden, die, wenn sie überhaupt verstreckbar ist, nicht von vornherein die Form

$$F_{12} f_3 + G_{12} g_3 + H_{12} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

hätte oder sofort auf diese Form gebracht werden könnte, eine Form, deren linke Seite eine ganze lineare Funktion von zwei Funktionen f_3 und g_3 einer der Veränderlichen, z_3, ist. Man sagt von einer solchen Form kurz: sie ist nach z_3 geordnet. Die Verstreckung dieser Gleichung (1) ist demnach von besonderer Bedeutung. Diese Anamorphose kann nun, von besonderen, seltenen Fällen abgesehen, auf folgende einfache Weise vollzogen werden. Man setzt

$$x = \frac{F_{12}}{H_{12}} \qquad y = \frac{G_{12}}{H_{12}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

und eliminiert nacheinander z_2 und z_1 aus diesen beiden Gleichungen. Erhält man hierbei zwei in x und y lineare Gleichungen

$$\left.\begin{array}{ll}(z_1) \; . \; . \; . \; . \; . \; . & x f_1 + y g_1 + h_1 = 0 \\ (z_2) \; . \; . \; . \; . \; . \; . & x f_2 + y g_2 + h_2 = 0\end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (3),$$

so ist, da auch die Gleichung

$$(z_3) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad x f_3 + y g_3 + 1 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3a)$$

gilt, die sich durch Einsetzen der Werte x und y für $\frac{F_{12}}{H_{12}}$ und $\frac{G_{12}}{H_{12}}$ aus (2) in die durch H_{12} dividierte Gleichung (1) ergibt, die Anamorphose

$$\begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3 & g_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

ausgeführt. Dies ist das Verfahren nach der Eliminationsregel. Der umgekehrte Schluß, daß beim Versagen der Eliminationsregel die Gleichung (1) unverstreckbar wäre, ist falsch. Aber die Eliminationsregel versagt bei verstreckbaren Gleichungen der Form (1) nur in seltenen Ausnahmefällen, auf die wir noch zurückkommen werden.

Wir wollen die so häufig anwendbare Eliminationsregel an einem Beispiel erläutern, das von besonderem Interesse ist, einmal, weil an ihm dieses Verfahren zum

[1] Comptes rendus de l'Ac. des Sc., 1898, S. 265 und Bull. des Sciences math. 1898, S. 287.

[2] Comptes rendus de l'Ac. des Sc., 1910, S. 379.

[3] Journal de Math. pures et appl., 1912, S. 59. Man vergleiche auch Kellog, Ztschr. f. Math. u. Phys. 63, 1914, S. 159 und Soreau, II, S. 241.

erstenmal zur Anwendung kam, und zwar durch Massau, und dann auch, weil dieses Beispiel verschiedenen anderen Autoren zur Erläuterung ihrer Untersuchungen gedient hat.

Beispiel: Rechentafel für die Verjüngung von Stützmauern. In Abb. 2 sei $ABCD$ der für einen bestimmten Widerstand berechnete rechteckige Mauerquerschnitt; $MBCN$ sei das Trapez von gleicher Höhe und gleichem Widerstand; h sei das Verhältnis $AP:AD$, l das Verhältnis $MB:AB$, p das Verhältnis des spezifischen Gewichtes des abgedämmten Erdreichs zu demjenigen des Mauerwerks. l und p bewegen sich zwischen 0,5 und 1. Dann gilt die Formel

$$(1+l)h^2 - l(1+p)h - {}^1/_3(1-l)(1+2p) = 0 \quad . \quad . \quad (1).$$

Abb. 2

Schreiben wir sie

$$\frac{l(1+p)}{1+l}\,\frac{1}{h} + \frac{(1-l)(1+2p)}{3(1+l)}\,\frac{1}{h^2} - 1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (1a)$$

und fassen $\frac{1}{h}$ als f_3 und $\frac{1}{h^2}$ als g_3 auf, so haben wir zu setzen

$$x = \frac{l(1+p)}{1+l}, \quad y = \frac{(1-l)(1+2p)}{3(1+l)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Die sukzessive Elimination von p und l aus diesen Gleichungen liefert die in x und y linearen Gleichungen

$$\left.\begin{array}{ll}(l) \; . \; . \; . \; . \; . & 2(l^2-1)x + 3l(l+1)y - l(l-1) = 0 \\ (p) \; . \; . \; . \; . \; . & 2(2p+1)x + 3(p+1)y - (p+1)(2p+1) = 0\end{array}\right\} \; . \; . \; (3),$$

zu denen als dritte die aus (1a) durch Einsetzen der Werte (2) hervorgehende Gleichung

$$(h) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad hx + y - h^2 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3a)$$

kommt. Damit ist die Verstreckung vollzogen. Die drei letzten Gleichungen stellen, wenn man x und y als kartesische Koordinaten auffaßt, die erste, von Massau konstruierte nicht-kartesische Geradentafel dar, bei der jede Geradenschar vom zweiten Grade ist, also einen Kegelschnitt einhüllt. Durch projektive Umformung wird man der Geradentafel eine geeignete Form geben können, was Massau noch nicht tat. Will man die entsprechende Fluchtentafel herstellen, so kann man von der »erzeugenden Gleichung«

$$\begin{vmatrix} 2(l^2-1) & 3l(l+1) & l(l-1) \\ 2(2p+1) & 3(p+1) & (p+1)(2p+1) \\ h & 1 & h^2 \end{vmatrix} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

ausgehen, die der vorgelegten Gleichung (1) äquivalent ist und sich von ihr nur durch den von null verschiedenen »parasitischen Faktor« $lp+p+1$ unterscheidet. »Erzeugende Gleichung« heißt sie, weil sie die ganze »Familie« der projektiv verwandten Fluchtentafeln liefert. Man braucht nur ihre linke Seite durch die bekannten auf S. 64 erwähnten Determinantenumformungen, die einer linearen Transformation der Gleichungen (3) und (3a) entsprechen, auf eine geeignete Form $|\varphi_i \, \psi_i \, 1|$ zurechtzumodeln, aus der man dann die Parameterdarstellungen

$$x = \varphi_i, \quad y = \psi_i \quad [i = 1, 2, 3] \; . \; . \; (5)$$

der drei Leitern unmittelbar herauslesen kann. Da die Verhältnisse der 9 Chaslesschen Parameter λ, μ, ν, λ', ... (S. 64) 8 Konstanten darstellen, so können wir sie so bestimmen, daß 8 Bedingungen erfüllt werden. D'Ocagne nutzte zum erstenmal diese Möglichkeit dadurch aus, daß er die Enden der nutzbaren Teile der l-Leiter und der p-Leiter, also die Leiterpunkte $l = 0{,}5$; $l = 1$ und $p = 0{,}5$; $p = 1$ auf die Ecken eines Rechtecks brachte. Er gelangte so zu der eleganten Darstellung, die in Abb. 3 verkleinert wiedergegeben ist. Die Leitern kann man nach den Gleichungen (5) punktweise

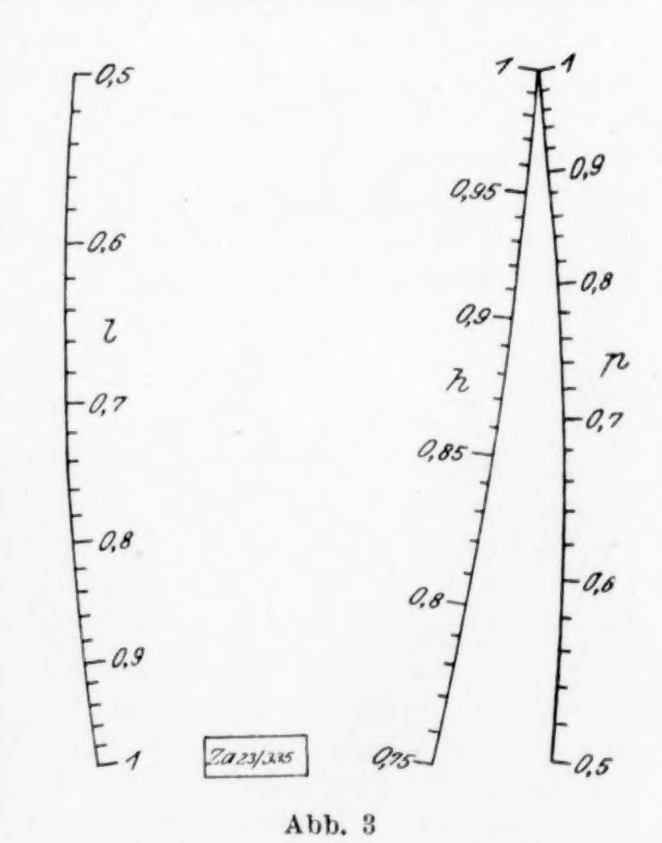


Abb. 3

berechnen. Da sie aber in unserem Falle Punktreihen vom zweiten Grade, also Kegelschnitte sind, so lassen sie sich auch projektiv konstruieren.

5. Die nomographische Ordnung. Die Gleichungsform

$$|\varphi_i \quad \psi_i \quad 1| = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

auf die die vorgelegte Gleichung bei der Verstreckung zu bringen ist, hat folgende Eigenschaften: Sie ist eine »Gleichung mit getrennten Funktionen«, d. h. ihre linke Seite ist eine ganze rationale Verbindung der sechs Funktionen $\varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2, \varphi_3, \psi_3$ der einzelnen Variablen und ist noch dazu in bezug auf jede dieser Funktionen linear. Dabei kommt von jeder Veränderlichen in jedem Glied höchstens eine der Funktionen vor. Dadurch, daß wir im vorigen Abschnitt die vorgelegte Gleichung in der Form $f_3 F_{12} + g_3 G_{12} + H_{12} = 0$ annahmen, setzten wir voraus, daß sie wenigstens in bezug auf z_3 eine Gleichung mit zwei getrennten Funktionen f_3 und g_3 sei. Wenn wir nun weitergehend voraussetzen, daß die Gleichung auch in bezug auf z_1 und auf z_2 nur im ersten Grade vorkommende getrennte Funktionen habe, und zwar deren höchstens je zwei, und derart, daß in jedem Glied von jeder Veränderlichen höchstens eine Funktion vorkommt, so eröffnen wir den näheren Ausbau der in erster Linie für die Verstreckung in Betracht kommenden Fälle und befinden uns dabei gleichzeitig im Einklang mit den Forderungen der Technik, deren zu vertafelnde Gleichungen in den meisten Fällen Gleichungen mit getrennten Funktionen sind.

Mit anderen Worten setzen wir also jetzt die linke Seite der vorgelegten Gleichung als eine Funktion der 6 Funktionen $f_1, g_1, f_2, g_2, f_3, g_3$ voraus, die in bezug auf jedes der drei Paare f_1 und g_1, f_2 und g_2, f_3 und g_3 ganz, rational und linear ist:

$$F_{12} f_3 + G_{12} g_3 + H_{12} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2),$$

wobei jetzt F_{12}, G_{12}, H_{12} Ausdrücke von der allgemeinen Form

$$F_{12} = (a f_1 + b g_1 + c) f_2 + (a' f_1 + b' g_1 + c') g_2 + (a'' f_1 + b'' g_1 + c'') \quad . \; . \quad (2a)$$

sind, also Ausdrücke mit getrennten Funktionen. Wir sagen nun: Die Gleichung (2) ist in bezug auf die Variable z_i von der nomographischen Ordnung 2, wenn in ihr tatsächlich zwei voneinander linear nicht abhängige Funktionen f_i, g_i vorkommen. So ist die Gleichung (2), wie sie dasteht, in bezug auf z_3 im allgemeinen von der nomographischen Ordnung 2. Ist aber in ihr $G_{12} = 0$ oder ist g_3 linear durch f_3 darstellbar, also $g_3 = A f_3 + B$, so reduziert sie sich auf

$$F_{12} f_3 + H_{12} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

und ist in bezug auf z_3 von der Ordnung 1. Von der Ordnung 0 kann die Gleichung in bezug auf keine der Variablen z_i sein, da sie dann unabhängig von z_i wäre.

Der so definierte Begriff der nomographischen Ordnung in bezug auf eine Veränderliche wäre ohne weiteres brauchbar, wenn er bei der Umwandlung der vorgelegten Gleichung in eine ihr äquivalente mit anderen Funktionen und Funktionsverknüpfungen invariant bliebe. Das ist zwar in den meisten praktischen Fällen so, gilt aber nicht allgemein, wie der folgende singuläre Fall zeigt. Die Gleichung

$$f_1 = f_2 f_3 + \sqrt{1 + f_2^2}\sqrt{1 + f_3^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

erscheint in bezug auf z_3 von der Ordnung 2, denn sie enthält die Funktionen f_3 und $\sqrt{1 + f_3^2}$. Nun können wir aber, falls f_2 und f_3 positiv sind, diese Gleichung auch in der Form

$$f_1 + \sqrt{f_1^2 - 1} = (f_2 + \sqrt{1 + f_2^2})(f_3 + \sqrt{1 + f_3^2}) \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

schreiben, die in bezug auf z_3 von der Ordnung 1 ist, da nur noch eine Funktion von z_3, nämlich $f_3 + \sqrt{1 + f_3^2}$, auftritt.

Deshalb unterscheidet Soreau, der den Begriff der nomographischen Ordnung eingeführt hat, die wahre von der scheinbaren nomographischen Ordnung. Die Gleichung (2) ist in bezug auf z_3 von der wahren nomographischen Ordnung 2, wenn sie nicht auf die Form der Gleichung (3) reduktibel ist. Ist dies dagegen der Fall, so hat sie in bezug auf z_3 die scheinbare Ordnung 2 und die wahre Ordnung 1.

Als scheinbare Ordnung einer Gleichung (2) wird die Summe ihrer scheinbaren Ordnungen in bezug auf die drei Variablen z_1, z_2, z_3 bezeichnet, als wahre Ordnung der Gleichung die Summe ihrer wahren Ordnungen. So ist die Gleichung (1) von Seite 67 von der Ordnung 4, da sie linear in l, p, h und h^2 ist. 4 ist die wahre Ordnung, da, wie wir noch sehen werden, im Falle der Ordnung 3 die Form (2) von

S. 65 herstellbar sein müßte, und das ist nicht der Fall, da die Bedingung von de Saint Robert in diesem Fall erfüllt oder r_{12} auf die Form $\frac{u_1}{u_2}$ zu bringen sein müßte, was nicht möglich ist (vergl. S. 65).

Da eine verstreckbare Gleichung auf die Form (1) reduktibel, diese aber mindestens von der Ordnung 3 und höchstens von der Ordnung 6 ist, so können nur Gleichungen von den wahren Ordnungen 3, 4, 5 oder 6 für die Verstreckung in Frage kommen. Wir wollen nun die Hauptergebnisse angeben, die die Verstreckungsaufgabe für die verschiedenen Ordnungen gezeitigt hat.

6. Die Gleichungen dritter Ordnung. Die Gleichungen dritter und vierter Ordnung sind stets verstreckbar, während dies bei den Gleichungen fünfter und sechster Ordnung nicht allgemein der Fall ist.

Eine Gleichung von der Ordnung 3 hat die Form

$$A f_1 f_2 f_3 + B_1 f_2 f_3 + B_2 f_3 f_1 + B_3 f_1 f_2 + C_1 f_1 + C_2 f_2 + C_3 f_3 + D = 0 \quad . \quad . \quad (1).$$

Je nachdem die Diskriminante

$$\Delta = (B_1 C_1 + B_2 C_2 + B_3 C_3 - A D)^2 - 4 (B_1 C_1 B_2 C_2 + B_2 C_2 B_3 C_3 + B_3 C_3 B_1 C_1 - A C_1 C_2 C_3 - B_1 B_2 B_3 D)$$

dieser Gleichung null, positiv oder negativ ist, läßt sich die Gleichung auf eine der »kanonischen Formen«

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 0 \text{ (für } \Delta = 0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\text{I}),$$

$$\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 = 1 \text{ (für } \Delta > 0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\text{II}),$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 = 0 \text{ (für } \Delta < 0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\text{III}),$$

auf algebraischem Wege transformieren. Dabei sind die φ_i im allgemeinen gebrochene lineare Funktionen der f_i der Gleichung (1). Statt des üblichen Ausdrucks algebraische Anamorphose wäre deshalb wohl die Bezeichnung rationale Anamorphose oder rationale Verstreckung zutreffender. Die Reduktion für die Fälle $\Delta = 0$ und $\Delta > 0$ vollzog zuerst d'Ocagne[1]), allerdings durch sehr mühselige Rechnungen, die er später durch eine einfachere Ableitung ersetzte[2]). Die Reduktion auf die Form (III) gab zuerst G. Fontené[3]) in der transzendenten Form

$$\text{arc tg } \varphi_1 + \text{arc tg } \varphi_2 + \text{arc tg } \varphi_3 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Daß die kanonischen Formen (I), (II), (III) wirklich Verstreckungen sind, ist leicht zu erkennen; man kann sie z. B. nach der Eliminationsregel auf die Massausche Determinantenform bringen.

Außer den algebraischen Verstreckungen sind auch transzendente Verstreckungen möglich. Eine solche ist z. B. die obengenannte Fontenésche Form (2) der Gleichung (III). Ebenso erhält man durch Logarithmieren der Gleichung (II) die Form

$$\log \varphi_1 + \log \varphi_2 + \log \varphi_3 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Wie man sieht, sind die Gleichungen (2) und (3) von der Form (I). Es ist also möglich, jede Gleichung dritter Ordnung durch algebraische oder transzendente Verstreckung auf die Form (I) zu bringen. Soreau[4]) hat in sehr einfacher Weise die Verstreckung zugleich für die drei Fälle $\Delta = 0$, $\Delta \gtrless 0$ mit den Hilfsmitteln der Analysis durchgeführt. Wie wir schon S. 65 sahen, genügen die auf (I) algebraisch oder transzendent reduzierbaren Gleichungen der Bedingungsgleichung von de Saint Robert oder der Soreauschen Bedingungsgleichung

$$r_{12} = \frac{\varphi_1'}{\varphi_2'}.$$

Soreau zeigte nun, daß sich das r_{12} der Gleichung (1) in der Form $\frac{1}{T_1} : \frac{1}{T_2}$ schreiben läßt, wo T_i ein in f_i quadratisches Trinom ist. Die gesuchte Reduktion auf die Form (I) ist dann

$$\int \frac{d f_1}{T_1} + \int \frac{d f_2}{T_2} + \int \frac{d f_3}{T_3} + \lambda = 0,$$

[1]) Acta Mathematica, XXI, S. 301 und Traité de Nom. 1. Aufl. S. 436.

[2]) Calcul graphique et Nomographie, Paris, 1. Aufl. 1908, S. 255 und Traité de Nom., 2. Aufl.

[3]) Nouv. Ann. de Math., 1900, S. 494.

[4]) Comptes rend. l'Ac. des Sc., 1912.

wo λ eine Konstante ist. Da nun die Diskriminanten der drei quadratischen Ausdrücke T_i miteinander und der Diskriminante Δ von (1) übereinstimmen, so ergibt die Integration für $\Delta = 0$ die rationale Verstreckung (I), für $\Delta > 0$ die transzendente Verstreckung (3) und für $\Delta < 0$ die transzendente Verstreckung (2), wobei φ_i eine lineare gebrochene Funktion des gegebenen f_i ist.

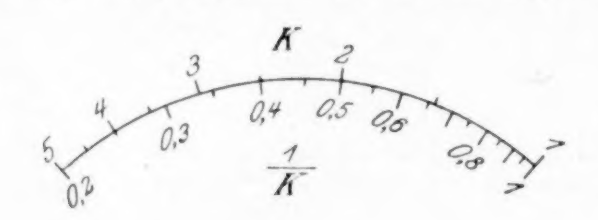
Die Formen der Gleichungen (I), (II), (III) lassen sich durch transzendente Umformungen wechselseitig ineinander überführen, es läßt sich z. B. die Gleichung (I) auch schreiben

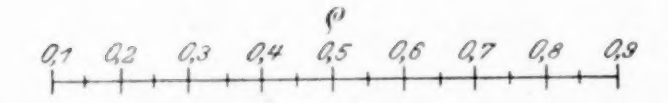
$$a^{\varphi_1}\, a^{\varphi_2}\, a^{\varphi_3} = 1,$$

und damit auf die Form (II) bringen. Bei Zulassung transzendenter Anamorphosen kann man also die Gleichung dritter Ordnung (1) auf eine beliebige der Formen (I), (II), (III) bringen. Außer log und arc tg könnten auch andere transzendente Funktionen verwandt werden, haben aber keine praktische Verwendung gefunden.

Auch die »algebraischen« Verstreckungen hat nach den Vorarbeiten von d'Ocagne und Clark[1]) zuerst Soreau in größter Vollständigkeit nach algebraischen Methoden behandelt. Durch Einführung willkürlicher Parameter läßt sich zeigen, daß in jedem Fall unendlich viele, projektiv voneinander verschiedene algebraische Verstreckungen möglich sind.

Praktisch hat die Form (III) keine Bedeutung, da bisher in den Anwendungen keine Gleichung der Ordnung 3 mit negativer Diskriminante aufgetreten ist. Um so größer ist die Bedeutung der Formen (I) und (II). Denn die weitaus größte Zahl der verstreckbaren Gleichungen unter den Formeln der Technik ist von der Ordnung 3 und und hat verschwindende oder positive Diskriminante. Ohne auf die Geradentafeln und auf die für die kanonische Form (I) möglichen Rechenschieber und Sechsecktafeln einzugehen, werfen wir einen Blick auf die Formen der Fluchtentafeln, zu welchen die kanonischen Formen (I), (II), (III) führen. (I) und (II) sind durch Fluchtentafeln mit geradlinigen Leitern darstellbar. Bei (I) kann man, wie wir schon S. 65 sagten, alle Leiterträger parallel wählen. Beachtet man die projektive Formbarkeit, so ist allgemeiner zu sagen, daß die geradlinigen Leitern der Darstellung von (I) durch einen Punkt gehen. Dagegen bilden sie bei den Tafeln zu (II) ein Dreieck.





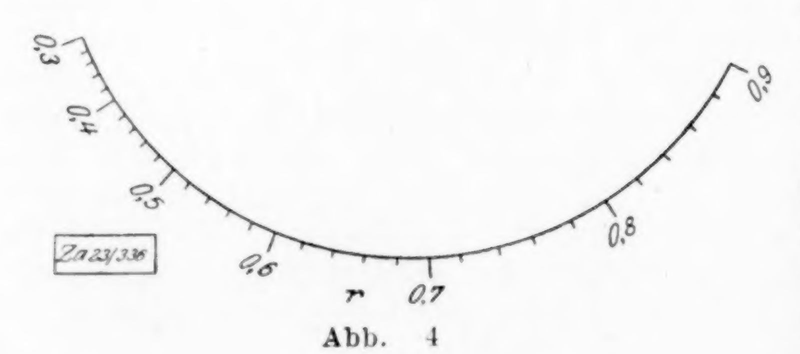


Abb. 4

Außerdem ist es aber in den Fällen (I) und (II) möglich, und zwar auf unendlich viele, projektiv voneinander verschiedene Arten, eine Skale auf einen geraden Träger und die beiden anderen auf ein und denselben Kegelschnitt zu bringen, der im Falle (I) von der geraden Leiter berührt, m Falle (II) geschnitten wird[2]). Der unwichtige Fall (III) läßt sich nicht mit drei geradlinigen Trägern behandeln. Wiederum kann auf unendlich viele, projektiv nicht zu einer Familie gehörige Arten ein Kegelschnitt und eine Gerade gewählt werden, die in diesem Fall den Kegelschnitt nicht schneidet.

Die Formen, bei denen ein Kegelschnitt als Träger zweier Leitern verwandt wird, kommen seltener zur Anwendung, da ihre Herstellung mühsamer ist. Sie bieten aber neben der projektiven Abbildung ein neues Mittel, ein Skalenstück, das bei Verwendung geradliniger Träger mit seinem nutzbaren Teil bis ins Unendliche reichen würde, auf brauchbare endliche Länge zu bringen. Der Kegelschnitt kann speziell zu einem Kreise

[1]) Revue de Mécanique, 1907,

[2]) Wie Mehmke bemerkte, wies Möbius (Crelles Journal, Bd. 22, S. 280, Fußnote) schon 1841 im Vorübergehen auf die Möglichkeit einer »Multiplikationsmaschine«, bestehend aus einer geteilten und bezifferten Parabel und einer ebensolchen Geraden, hin. Ein Lineal solle zum Ablesen der Werte dienen. Die Parabel könne auch durch zwei Geraden ersetzt werden.

gemacht werden, was die Konstruktion erleichtert[1]). Abb. 4 zeigt eine solche Tafel von Soreau für den wahren Wirkungsgrad $\varrho = \frac{r}{1+(K-1)(1-r)}$ einer Transmission, wenn r der Wirkungsgrad und $\frac{1}{K}$ der Aktivitätskoeffizient der Transmission ist, d. h. der Bruchteil der Zeit des Motorlaufs ist, währenddessen die angeschlossenen Maschinen arbeiten.

Der Vorteil der »algebraischen« Verstreckung gegenüber der transzendenten besteht besonders darin, daß die Funktionen der auftretenden Skalen zu den Skalen der ursprünglichen Funktionen f_1, f_2, f_3 projektiv sind, aus ihnen also auf geometrischem Wege gewonnen werden können. Dies ist besonders dann von Vorteil, wenn, wie so oft, die Leitern der ursprünglichen Funktionen leicht herstellbar sind, wie etwa die gleichförmige Leiter $f_i = z_i$ oder die Kosinusleiter $f_i = \cos z_i$.

Wir erwähnen noch, daß die Punkte, in denen sich die (gerad- oder krummlinigen) Leitern schneiden, als »kritische Punkte« (d'Ocagne) oder als »Knotenpunkte« (Soreau) bezeichnet werden. Da die Bezifferungen dieser Knotenpunkte, die »kritischen Werte«, die man schon bei Massau angedeutet findet, bei allen, auch projektiv verschiedenen Formen, die man der Tafel geben kann, invariant bleiben und aus der vorgelegten Gleichung bestimmbar sind, so spielen sie eine Rolle in der Theorie. Auf diese kritischen Werte hat d'Ocagne seinen zweiten Beweis der Verstreckbarkeit der Gleichungen dritter Ordnung gegründet.

Wie Clark zeigte, kann man die drei Skalen einer Gleichung von der Ordnung 3 auch auf ein und dieselbe Kurve dritter Ordnung werfen. Praktische Bedeutung hat das Verfahren nicht.

Unter den transzendenten Anamorphosen hat praktische Bedeutung eigentlich nur die so oft zur Verwendung kommende Ueberführung der Form (II) auf die Form (I) durch Logarithmieren, die ja schon Lalanne in Sonderfällen anwandte. Sie ist nicht brauchbar, wenn eine der Funktionen f_i in ihrem zu verwendenden Bereich null wird.

7. Die Gleichungen vierter und höherer Ordnung. Die Gleichungen von höherer Ordnung als 3 haben im Gegensatz zu denjenigen dritter Ordnung die gemeinsame Eigenschaft, daß sie, wenn sie überhaupt verstreckbar sind, nur algebraische, keine transzendenten Anamorphosen zulassen. Soreau hat dies durch Untersuchungen, auf die wir im nächsten Abschnitt zurückkommen werden, nachgewiesen.

Bei den Gleichungen vierter Ordnung liegen die Dinge besonders einfach. Es ist stets eine und nur eine algebraische Verstreckung möglich. Das erste Beispiel einer derartigen Verstreckung, die Massau nach der Eliminationsregel ausführte, haben wir auf S. 67 wiedergegeben. Vor allem Clark[2]) und Soreau haben die Verstreckung der Gleichungen vierter Ordnung allgemein untersucht und auf die Fluchtentafeln angewandt.

Eine Gleichung vierter Ordnung läßt sich schreiben

$$F_{12} f_3 + G_{12} g_3 + H_{12} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (1),$$

wobei

$$\left.\begin{array}{l} F_{12} = a_0 f_1 f_2 + a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 \\ G_{12} = b_0 f_1 f_2 + b_1 f_1 + b_2 f_2 + b_3 \\ H_{12} = c_0 f_1 f_2 + c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (2).$$

Clark zeigte, daß diese Gleichung sich auf die eine oder die andere der kanonischen Formen

$$f_1 g_3 + f_2 + f_3 = 0 \ (\text{für } \Delta' = 0) \quad \ldots \ldots \quad (\mathrm{IV}_0)$$

$$f_1 f_2 f_3 + (f_1 + f_2) g_3 + h_3 = 0 \ (\text{für } \Delta' \neq 0) \quad \ldots \ldots \quad (\mathrm{IV})$$

reduzieren läßt, je nachdem der Ausdruck

$$\Delta' = D_0 D_3 - D_1 D_2 \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

gleich null oder von null verschieden ist. In diesem Ausdruck ist D_i die Determinante, deren Elemente sich ergeben, wenn man in dem System

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

die Spalte mit dem Index i streicht.

---

[1]) Ueber eine elementare Ableitung dieser Konstruktion vergl. man F. Krauß, die Nomographie oder Fluchtlinienkunst, Berlin 1922, S. 33 bis 36.

[2]) Bulletin mensuel de l'Assoc. franç. pour l'Avanc. d. Sciences, Novembre 1905 und Revue de Mécanique 1907.

Die in den Anwendungen sehr oft vorkommende Form (IV_0) begegnete uns schon S. 65 in der Form der Gleichung (9), die wir durch die von null verschiedene Funktion g_3 dividieren können, um auf die bequemere Schreibweise (IV_0) zu kommen. Als Netztafel ergibt die Gleichung, wie wir schon sahen, eine kartesische Geradentafel, als Fluchtentafel eine Tafel mit zwei geradlinigen Leitern für z_1 und z_3 und einer krummlinigen Leiter für z_3. D'Ocagnes erstes Beispiel einer Fluchtentafel, die Tafel für die reduzierte kubische Gleichung[1]), fällt unter diesen verbreiteten Typ.

Bei den Fluchtentafeln für den Fall (IV) fallen die Teilungen für z_1 und z_2 auf ein und denselben Kegelschnitt; die dritte Leiter ist eine Kurve, die im allgemeinen punktweise konstruiert werden muß. Die nach der Eliminationsregel auffindbare Determinantenform der Verstreckungsgleichung (IV):

$$\begin{vmatrix} 1 & f_1 & f_1^2 \\ 1 & f_2 & f_2^2 \\ f_3 & -g_3 & h_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4),$$

die sich von (IV) nur durch den »parasitären Faktor« $(f_1 - f_2)$ unterscheidet, zeigt dies, denn sie ergibt z. B. die Leitern

$$L_1 \equiv \begin{cases} x = f_1 \\ y = f_1^2 \end{cases} \quad L_2 \equiv \begin{cases} x = f_2 \\ y = f_2^2 \end{cases} \quad L_3 \equiv \begin{cases} x = -\dfrac{g_3}{f_3} \\ y = \dfrac{h_3}{f_3} \end{cases} \quad \ldots \quad (5).$$

Natürlich wird man die Determinante von (4) gewöhnlich vorher passend formen. Wir erwähnten dies schon S. 67 und haben in Abb. 3 eine Fluchtentafel für eine Gleichung vierter Ordnung kennen gelernt. Die Leitern für l und p liegen hier auf ein und demselben Kegelschnitt. Soreau hat praktische Methoden ausgebildet, nach denen man den Kegelschnitt zu einem Kreise machen kann.

Sind die Größen f_3, g_3, h_3 linear voneinander abhängig oder ist eine von ihnen gleich null, so reduziert sich die Gleichung vierter Ordnung auf eine solche dritter Ordnung

$$F_{12} f_3 + G_{12} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

und die z_3-Leiter wird geradlinig. Die algebraische Anamorphose der Gleichungen dritter Ordnung ist somit in derjenigen der Gleichungen vierter Ordnung enthalten. Dabei kann man den Koeffizienten c_0, c_1, c_2, c_3 willkürliche Werte beilegen. Diese Parameter sind es, die die oben erwähnte Mannigfaltigkeit der projektiv verschiedenen algebraischen Anamorphosen der Gleichungen dritter Ordnung bewirken.

Die Gleichungen fünfter und sechster Ordnung sind im allgemeinen nicht verstreckbar. Die Bedingungen, unter denen eine algebraische Verstreckung möglich ist, hat zuerst Farid Boulad[2]) aufgesucht. Für die verstreckbaren Gleichungen fünfter Ordnung gilt die kanonische Form

$$\varphi_1 = \frac{\varphi_2 + \varphi_3}{\psi_2 + \psi_3} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (V),$$

die häufig in den Anwendungen vorkommt, für diejenigen sechster Ordnung die kanonische Form

$$\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{\psi_1 + \psi_2} = \frac{\varphi_1 + \varphi_3}{\psi_1 + \psi_3} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (VI),$$

die nur eine andere Schreibweise der allgemeinen Massauschen Verstreckungsgleichung $|\varphi_i \, \psi_i \, 1| = 0$ ist.

Für die Ordnung 5 erhält man eine geradlinige und zwei krummlinige Leitern, für die Ordnung 6 drei krummlinige Leitern.

8. Die Verstreckung der Gleichung $F_{12} f_3 + G_{12} g_3 + H_{12} = 0$. Im Abschnitt 4 zeigten wir, wie die Gleichung

$$F_{12} f_3 + G_{12} g_3 + H_{12} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

nach der Eliminationsregel verstreckt werden kann. Mißlingt die Anwendung dieser Regel, so folgt daraus nicht, daß die Gleichung unverstreckbar ist. Fassen wir z. B. in der Gleichung

$$f_1 = f_2 f_3 + \sqrt{1 + f_3^2} \sqrt{1 + f_3^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

---

[1]) Ann. des Ponts et Chaussées, 1884, S. 531.

[2]) Comptes rendus de l'Ac. d. Sc., 1910, S. 379 und Bulletin de la Soc. math. de France, 1911, S. 105.

die Funktionen f_3 und $\sqrt{1+f_3^2}$ als f_3 und g_3 von (1) auf, so führt der Versuch, die Gleichung (2) zu verstrecken, zu einem Mißerfolg, denn wenn man in

$$x = \frac{F_{12}}{H_{12}} = \frac{f_2}{-f_1} \text{ und } y = \frac{G_{12}}{H_{12}} = \frac{\sqrt{1+f_2^2}}{-f_1}$$

die Funktionen f_2 und f_1 nacheinander eliminiert, so erhält man nicht ein System in x und y linearer Gleichungen. Und doch ist die Gleichung (2) verstreckbar, da sie sich, wie wir S. 68 sahen, auf die Gleichung

$$f_1 + \sqrt{f_1^2 - 1} = (f_2 + \sqrt{1+f_2^2})(f_3 + \sqrt{1+f_3^2}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

umformen läßt. Die Gleichung (2) ist in z_2 und z_3 nur scheinbar von der Ordnung 2, in Wahrheit läßt sich statt (1) hier schreiben

$$F_{12} f_3 + H_{12} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Wir wollen nun den Fall, daß (1) sich auf (4) reduzieren läßt, ein Fall, für den die Kriterien aufgestellt worden sind, ausschließen. Auch dann ist ein Mißerfolg mit dem Eliminationsverfahren noch kein Kriterium für die Unverstreckbarkeit. Das zeigt folgendes Beispiel. Es sei gegeben die Gleichung

$$u = D^2 + Dd + d^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5),$$

die das Volumen eines Kegelstumpfs darstellt, wenn

$$u = \frac{12\,V}{\pi\,h}$$

ist. Nach der Eliminationsregel ist diese Gleichung (5) nicht verstreckbar, denn betrachten wir z B. D^2 und D als die Funktionen f_3 und g_3, so liefert das Eliminationsverfahren die Gleichungen $\quad x = d, \quad y = x^2 - u,$

die in x und y nicht beide linear sind. Falsch wäre es aber, daraus zu schließen, (5) sei unverstreckbar. Multiplizieren wir die Gleichung (5) nämlich mit dem parasitischem Faktor $(D-d)$, so können wir sie schreiben

$$u = \frac{D^3 - d^3}{D - d} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

und haben sie damit auf die kanonische Form der verstreckbaren Gleichungen fünfter Ordnung gebracht ((V) auf S. 72). Der Faktor $(D-d)$ wird deshalb **verstreckender** (**anamorphosierender**) Faktor der Gleichung (5) genannt. Das Wort ist nach dem Vorbild des »integrierenden Faktors« der Differentialgleichungen gebildet.

Es wäre weiter denkbar, daß außer den Verstreckungen, die die Eliminationsregel ohne oder mit vorheriger Anwendung eines verstreckenden Faktors liefert, noch andere, darunter auch transzendente Anamorphosen möglich wären, wie wir solche bei den Gleichungen dritter Ordnung kennen lernten.

Um diese Fragen zu klären, stellte sich Soreau die Aufgabe: Auf welche Arten ist es möglich, die nicht auf die Form (4) reduktible Gleichung

$$E_{123} \equiv F_{12} f_3 + G_{12} g_3 + 1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

auf eine äquivalente Gleichung von demselben Bau

$$\Theta_{123} \equiv \Phi_{12}\,\varphi_3 + \Psi_{12}\,\psi_3 + 1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

zu transformieren?

Die Diskussion der hierbei zu erfüllenden Gleichung (vergl. S. 65)

$$\frac{E_1'}{\Theta_1'} = \frac{E_2'}{\Theta_2'} = \frac{E_3'}{\Theta_3'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9),$$

in der E_i' und Θ_i' die nach z_i genommenen partiellen Ableitungen von E_{123} und Θ_{123} sind, führte ihn zu folgenden Ergebnissen:

a) Im allgemeinen hat eine Gleichung (7) keine anderen Transformierten der Art (8) als diejenigen, die durch die Funktionsänderungen

$$f_3 = \frac{a\varphi_3 + b\psi_3 + c}{a''\varphi_3 + b''\psi_3 + c''}, \qquad g_3 = \frac{a'\varphi_3 + b'\psi_3 + c'}{a''\varphi_3 + b''\psi_3 + c''} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

definiert werden.

b) Wenn zwischen f_3 und g_3 eine Beziehung zweiten, dritten oder vierten Grades besteht, so hat (7) unendlich viele Transformierte (8), die man dadurch erhält, daß man (7) mit geeigneten Faktoren multipliziert, die in bezug auf die Funktionen von (7) rational sind.

Da eine etwa mögliche Verstreckung $|\varphi_i \psi_i 1| = 0$ von (7) von der Art (8) sein muß, so zeitigt Soreaus Ergebnis eine Reihe von Folgerungen für die Verstreckung. Die wichtigsten sind folgende:

1. Gleichungen von der Form (7) haben keine transzendenten Verstreckungen. Insbesondere ist also die oben gekennzeichnete algebraische Verstreckung der Gleichung vierter Ordnung die einzig mögliche. Ebenso sind bei Gleichungen fünfter und sechster Ordnung nur algebraische Verstreckungen möglich.

2. Unter Voraussetzung der Irreduktibilität von (7) mißlingt die Anwendung der Eliminationsregel bei verstreckbaren Gleichungen nur dann, wenn der Fall b) vorliegt. Gleichungen, die in dieser Weise einen verstreckenden Faktor erfordern, sind solche mit getrennten Funktionen, und bei ihnen sind die Funktionspaare f_i, g_i durch Gleichungen verbunden, die alle vom zweiten oder alle vom dritten oder vierten Grade sind. In unserem Beispiel von S. 73,

$$u = D^2 + Dd + d^2,$$

bestehen, wenn wir $f_2 = d$, $g_2 = d^2$, $f_3 = D$, $g_3 = D^2$ setzen, die Gleichungen zweiten Grades $f_2{}^2 = g_2$, $f_3{}^2 = g_3$. Der verstreckende Faktor ist hier $f_2 - f_3$.

Der Fall b) ist ein seltener Ausnahmefall und es wird bei Formeln der Technik deshalb selten oder nie vorkommen, daß sie zur Verstreckung eines verstreckenden Faktors bedürfen. Die Kegelstumpfformel und die verwandten Inhaltsformeln sind wohl die einzigen Fälle, die allenfalls praktisch in Frage kämen. Damit rückt die Bedeutung der Eliminationsregel in das rechte Licht, die fast immer ein Kriterium der Verstreckbarkeit darstellt.

Durch Soreaus Ergebnisse wurden insbesondere Boulads Untersuchungen über die Verstreckbarkeit der Gleichungen fünfter und sechster Ordnung erst auf eine feste Grundlage gestellt. Boulad mußte noch die Möglichkeit offen halten, daß außer der von ihm untersuchten algebraischen Verstreckbarkeit auf die Form

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ f_3 & g_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

noch andere algebraische oder transzendente Verstreckungen vorhanden seien. Jetzt steht aber fest, daß die Gleichung (7), wenn sie überhaupt anamorphosierbar ist, entweder auf die Form (10) gebracht werden kann oder durch einen verstreckenden Faktor zu anamorphosieren ist.

9. Gleichungen mit mehr als drei Veränderlichen. Sehr viele Gleichungen mit mehr als drei Veränderlichen lassen sich durch Einführung von Hilfsveränderlichen in solche mit drei Veränderlichen zerfällen. Bei einer Gleichung mit 4 Veränderlichen

$$F_{1234} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

liegt eine solche Zerfällung vor, wenn (1) sich als Ergebnis der Elimination einer Hilfsveränderlichen ζ aus den beiden Gleichungen

$$F(z_1, z_2, \zeta) = 0, \quad G(z_3, z_4, \zeta) = 0 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

auffassen läßt. In diesem Fall läßt sich (1) stets durch zwei Netztafeln darstellen, die nach Art von Abb. 5 derart verkoppelt sind, daß sie die Schar (ζ), die für gewöhnlich unbeziffert bleiben kann, gemeinsam haben. Man kann die Schar ζ beliebig wählen und außerdem noch in jeder Teiltafel eine Schar, etwa (z_1) und (z_3). Insbesondere kann man diese willkürlichen Scharen als Scharen paralleler, gleichweit voneinander entfernter Geraden wählen, wie es in der Abbildung geschehen ist und in den zahlreichen Anwendungen dieses Prinzips meistens geschieht. Die wiederholte Anwendung dieses Prinzips führt zu d'Ocagnes verzweigten Systemen. Lallemands[1]) Sechsecktafeln mit Netzen gehören zu den wichtigsten Anwendungen, wenn man sie nicht als Anwendungen des noch zu erwähnenden Prinzips der binären Leiter betrachten will.

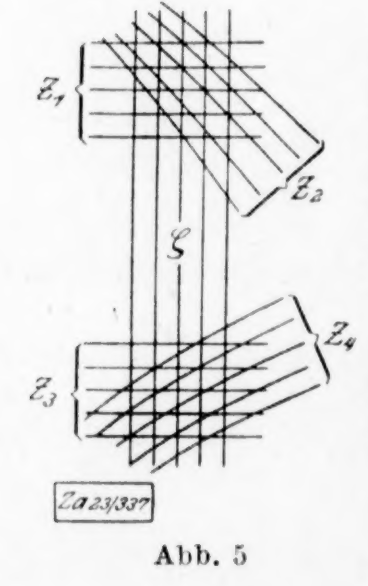


Abb. 5

Bei Fluchtentafeln ist die entsprechende Verkoppelung zweier Dreivariablentafeln dann und nur dann möglich, wenn die Gleichun-

[1]) Les abaques hexagonaux. Mémoire autographié, Paris, 1885 und Comptes rend. de l'Ac. d. Sc., 1886.

gen (2) derart verstreckbar sind, daß die Verstreckung dieselbe Punktreihe für das System (ζ) gibt, wenn die Gleichungen (2) sich also schreiben lassen

$$\begin{vmatrix} F_1 & G_1 & H_1 \\ F_2 & G_2 & H_2 \\ F(\zeta) & G(\zeta) & H(\zeta) \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} F(\zeta) & G(\zeta) & H(\zeta) \\ F_3 & G_3 & H_3 \\ F_4 & G_4 & H_4 \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Farid Boulad[1]) hat gezeigt, wie diese Darstellung unter gewissen Voraussetzungen gewonnen werden kann. Die Punktreihe (ζ), die im allgemeinen unbeziffert bleibt, ist die »Zapfenlinie«.

In fast allen praktischen Fällen nehmen die Gleichungen (2) die einfachere Form

$$\zeta = F_{12}, \quad \zeta = G_{34}$$

an, so daß also (1) auf die Form

$$F_{12} = G_{34} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

kommt. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für diese »Gruppierung« der Variablen von (1) sind sowohl allgemein mit Hilfe der Analysis aufgestellt worden, wie auch algebraisch für den Fall der allgemeinen Gleichung vierter Ordnung mit vier Veränderlichen.

Auf die Ausgestaltung der Theorie der verkoppelten Fluchtentafeln, die viele Anwendungen gefunden hat, gehe ich hier ebensowenig ein wie auf die Verkoppelungen von Fluchtentafeln mit Netztafeln. Die letztere Art von Vereinigung wird dadurch möglich, daß eine Kurvenschar ζ, die selbst einer Netztafel für $\zeta = F_{12}$ angehört, diese Funktionswerte von zwei Variablen $\zeta = F_{12}$ auf einer sie durchschneidenden Kurve C zu einer »binären Leiter« »verdichtet« (Abb. 6).

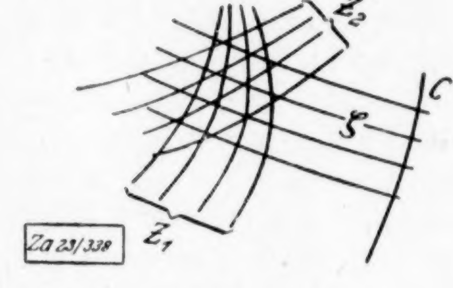


Abb. 6

Wenn man Lallemand als den Schöpfer der binären Leitern betrachtet, so erlaube ich mir zu bemerken, daß jedenfalls schon Apian (1495 bis 1552) in seinen Werken mit solchen verdichteten Leitern arbeitet, wie man überhaupt bei ihm und älteren Gnomonikern vieles hierher gehörige planmäßig angewandt findet, beispielsweise auch Lallemands »drehbare Leiter«[2]).

Die Verkoppelungsverfahren kommen nur für Gleichungen mit mehr als drei Veränderlichen in Betracht, die sich durch Einführung von Hilfsveränderlichen $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ in solche mit 3 Veränderlichen $F(z_1, z_2\, \zeta_1) = 0$, $G(z_3, \zeta_1, \zeta_2) = 0$, $H(z_4, \zeta_2, \zeta_3) = 0, \ldots$, $M(z_{n-1}, z_n, \zeta_{n-1})$ zerfällen lassen, sind also z. B. bei der nicht reduzierten kubischen Gleichung

$$z^3 + mz^2 + pz + q = 0,$$

in der z, m, p, q als die Variablen betrachtet werden, nicht anwendbar. Derartige Gleichungen, denen also mit verkoppelten Netztafeln nicht mehr beizukommen ist, können darstellbar werden, wenn man nach d'Ocagnes Vorgang das Fluchtungsverfahren statt auf gewöhnliche Leitern

$$x = f_1, \quad y = g_1$$

auf netzförmige »Leitern«

$$x = f_{12}, \quad y = g_{12}$$

anwendet. Ein solches System von »Punkten mit zwei Bezifferungen« ist ein Netz von zwei Kurvenscharen (z_1) und (z_2). Hier bringt das Fluchtlinienverfahren, das für 3 Veränderliche einen engeren Anwendungsbereich hat, als das Verfahren der Netztafeln, eine tatsächliche Erweiterung der Möglichkeiten der ebenen Darstellung von Gleichungen mit mehr als drei Veränderlichen. Wie stets, ist die Fluchtentafel natürlich nur möglich, wenn die Gleichung verstreckbar ist. Soll z. B. eine Gleichung mit 6 Veränderlichen $F_{123456} = 0$ durch eine Fluchtentafel dargestellt werden, bei der drei Punkte mit je zwei Bezifferungen auf einer Geraden liegen, so muß sie sich auf die Form

$$\begin{vmatrix} f_{12} & g_{12} & h_{12} \\ f_{34} & g_{34} & h_{34} \\ f_{56} & g_{56} & h_{56} \end{vmatrix} = 0$$

---

[1]) Bull. de la Soc. math. de France, 1912, S. 383, 1913, S. 366. Intern. Congress of Math. Cambridge, 1912. Comptes rendus de l'Ac. d. Sc., 1913 I, S. 865.

[2]) Auch die sogleich zu erwähnenden »Punkte mit zwei Bezifferungen« kommen vor. Daß in älteren Schöpfungen im Einzelfall »Verstreckungen« vorliegen, zeigt die Mercatorprojektion und das Beispiel, das ich in den Unterrichtsblättern für Math. u. Naturw. 29 (1923) S. 54 bis 59 behandelt habe. Von einer allgemeinen Anwendung der Anamorphose als Prinzip kann allerdings nicht die Rede sein.

verstrecken lassen. Als schöne Beispiele seien d'Ocagnes Vertafelungen der vollständigen kubischen und der reduzierten biquadratischen Gleichungen und sphärisch-trigonometrischer Formeln genannt.

10. Andere Methoden. Außer den Systemen mit mehreren Bezifferungen kommt als Mittel der Vertafelung von Gleichungen mit drei und mehr Veränderlichen und damit als Quelle neuer Nomogrammtypen die Anwendung von beweglichen Systemen in Betracht, die nicht bloß eine einzige gerade Linie sind und auch beziffert sein können. Keine von diesen anderen Methoden, die im Begriff eines allgemeinsten Nomogramms ihre Zusammenfassung finden, ist theoretisch so ausgebildet und praktisch in solchem Umfange angewandt worden, wie die von uns betrachtete, an die Bedingung der Verstreckbarkeit der Gleichungen geknüpfte Methode der Geradentafeln und der Fluchtentafeln, um die sich die ganze Entwicklung der modernen Nomographie konzentriert hat. Auch der Begriff der nomographischen Ordnung ist nur auf die verstreckbaren Gleichungen zugeschnitten. Daß die Entwicklung diesen Verlauf genommen hat und die verstreckbaren Gleichungen sich aus dem Meer aller Möglichkeiten als eine wohl durchforschte Insel herausgehoben haben, ist zu verstehen. Denn diese Methode erfaßt einen großen Teil der in den Anwendungen vorkommenden Formeln und die Vorzüge der Fluchtentafeln, unter denen die Formbarkeit durch projektive Abbildung nicht an letzter Stelle steht, gaben einen starken Ansporn zur Untersuchung der durch sie darstellbaren Gleichungen. Andere nomographische Methoden mit komplizierteren beweglichen Ablesefiguren, wie z. B. konzentrischen Kreisen, fanden um so weniger Anklang, als sie sich nur speziellen Gleichungsformen anpaßten, auf die sich die in der Praxis zu vertafelnden Gleichungen nicht bringen ließen.

Wenn so die Entfaltung der Nomographie verstreckbarer Gleichungen sachlich begründet ist, so wird man doch nicht leugnen können, daß der bloße Reiz, schöne und dankbare Einzelaufgaben mit Erfolg zu lösen, die Nomographie auch deshalb in diese Richtung gebracht hat, weil sich das Feld der projektiven Geometrie, einer Wissenschaft mit ausgebildeten Methoden, als ein willkommener Tummelplatz darbot, um die analytisch-geometrische Gestaltungslust auszutoben. Wenn zu mancher Fluchtentafel eines besonderen Typs nicht das Bedürfnis der Technik, sondern die Konstruktionslust des Geometers geführt, und manche elegante und zweckmäßige Tafel vielleicht gar keine praktische Anwendung gefunden haben sollte, so wäre darum doch über den Entwerfer der Tafel nicht der Stab zu brechen. Eher scheint mir schon eine Uebertreibung vorzuliegen, wenn etwa der Belgier Goedseels[1]), der selbst auf dem Gebiet der Nomographie gearbeitet hat, erklärt, »man könne fast sagen, die Fluchtlinienmethode bilde heute die Nomographie im eigentlichen Sinne«. Das heißt doch, den Teil an die Stelle des Ganzen setzen, und so darf man doch zum mindesten nicht über die zahlreichen unverstreckbaren Gleichungen hinwegsehen, für die die Netztafeln ein unentbehrliches Hilfsmittel sind.

Eine einseitige Uebertreibung scheint es mir auch zu sein, wenn eine einfach gebaute aber unverstreckbare Gleichung durch künstliche Komplikationen dem Fluchtlinienverfahren zugänglich gemacht wird. Hierzu ein Beispiel:

In seinem Traité des Abaques I S. 402 vertafelt Soreau die Formel des Board of Trade für zweireihige Zickzacknietungen

$$e = \frac{\sqrt{(11p + 4d)(p + 4d)}}{10} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$(0 < p < 400 \text{ mm}, \quad 0 < d < 100 \text{ mm}, \quad 0 < e < 200 \text{ mm}),$$

in der e den Abstand der beiden Reihen, p den Abstand zweier aufeinander folgenden Nieten derselben Reihe und d den Durchmesser einer Niete bedeutet.

Da diese Gleichung von der Ordnung 5 unverstreckbar ist, entwirft Soreau eine Tafel, die außer Leitern für p, e und d zwei unbezifferte Geraden und einen unbezifferten Punkt enthält und als Ablesehilfsmittel eine bewegliche Gerade und außerdem noch ein rechtwinkliges Geradenkreuz benötigt. Die Tafel ist noch dazu ohne Probieren nur für den Fall verwendbar, daß e gesucht ist. Der Holländer Vaes[2]), der sich vorher an der Formel versucht hat, benutzt gar neben dem Lineal in der Not einen Zirkel, um eine Strecke abzutragen und dann über einer gefundenen Strecke einen Halbkreis zu

[1]) Revue des Questions scientif. de Bruxelles, Januar 1922, S. 205.

[2]) F. J. Vaes, Technische Rekenplaten, Kon. Inst. van Ingenieurs, 1904.

beschreiben: ein Verfahren, daß man bald schon nicht mehr als nomographisch bezeichnen kann.

Im folgenden Abschnitt geben wir eine auf einem anderen Prinzip beruhende neue Lösung von trivialer Einfachheit.

11. Vertafelung der Gleichung $\varepsilon f_3{}^2 = a_{11} f_1{}^2 + 2 a_{12} f_1 f_2 + a_{22} f_2{}^2$ nach dem Stechzirkelverfahren. Die Gleichung (1) von S. 76 läßt sich schreiben

$$(10e)^2 + (5p)^2 = (6p + 4d)^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

und ist damit auf die Form des pythagoräischen Lehrsatzes gebracht. In Abb. 7 sind auf den Schenkeln eines rechten Winkels die gleichförmigen Leitern

$$x = 5p, \quad y = 10e \quad \ldots \quad (3)$$

und auf einer davon getrennt liegenden Geraden von einem Nullpunkt aus die gleichförmigen Leitern

$$x = 4d, \quad -x = 6p$$

aufgetragen.

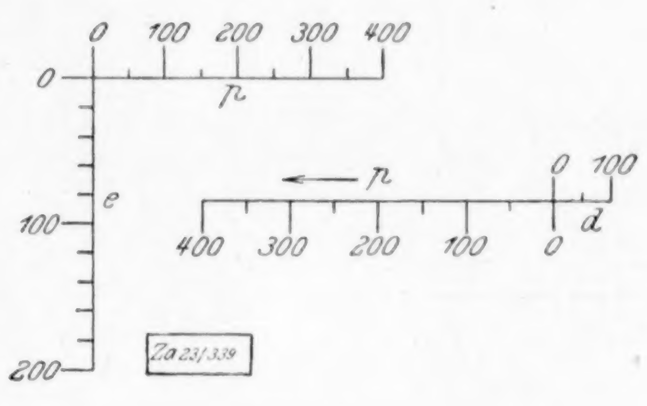


Abb. 7

Wird nun z. B. zu $d = 100$ mm, $p = 300$ mm der Wert von e gesucht, so greift man mit dem Stechzirkel auf der Geraden die Strecke zwischen den Teilpunkten $d = 100$ mm, $p = 300$ mm ab und setzt die eine Zirkelspitze auf den Punkt $p = 300$ mm des p-Schenkels. Die andere Spitze ergibt dann auf dem e-Schenkel sofort den gesuchten Wert $e = 160$ mm.

Bei dieser Lösung ist an die Stelle des Ablesungsprinzips: »Drei Punkte liegen auf einer Geraden« das ganz andersartige Ablesungsprinzip: »Der Abstand zweier Punkte ist gleich dem Abstand zweier anderer Punkte«, also das Prinzip der Streckenkongruenz getreten, für dessen bequeme und scharfe, mit einer Hand ausführbare Anwendung ein guter Stechzirkel die Gewähr bietet. (Man kann auch die geradlinige Leiter auf einen Papierstreifen zeichnen, der dann bei jeder Ablesung passend an den rechten Winkel anzulegen ist). Das Prinzip (vergl. diese Ztschr. 3, 1923, S. 51) findet seine normale Anwendung bei Gleichungen mit vier Veränderlichen von bestimmtem Typ. Den Gleichungen mit 3 Veränderlichen kann es auf zwei Arten angepaßt werden. Entweder man läßt eine Veränderliche zu einer Konstanten werden, oder man benutzt zwei Leitern für dieselbe Veränderliche, wie hier für die Veränderliche p. Man sagt im letzteren Falle: Die Tafel hat für p ein überzähliges System. Die beiden mit derselben Variablen bezifferten Leitern können zusammenfallen; dann haben wir die Stechzirkelnomogramme von Gerzevanow. Tritt die Variable eines überzähligen Systems als Unbekannte auf, so kann sie nur durch Probieren gefunden werden. Das schadet in unserem Falle nichts, da für gewöhnlich e gesucht wird. Sahen wir doch, daß Soreaus komplizierte Tafel zu dieser Formel überhaupt nur für e als Unbekannte bequem zu brauchen ist. Uebrigens kann man entsprechend der Zerlegung

$$(10\sqrt{11}\,e)^2 + (20d)^2 = (11p + 24d)^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

eine Tafel ganz derselben Art entwerfen, in der die Veränderliche d ein überzähliges System hat, so daß man bei Benutzung beider Tafeln nebeneinander jede Unbekannte stets bequem bestimmen kann. Da alle Leitern gleichförmig sind, so lassen sich diese Tafeln sehr bequem zeichnen. Daß diese Tafeln nicht projektiv formbar sind, ist kein Schade, weil die Genauigkeits- und Formverhältnisse günstig sind.

Auf folgende Weise, die der zuerst genannten Möglichkeit, die Stechzirkeltafeln für Gleichungen mit drei Variablen zu verwenden, entspricht, kann man für die Formel (1) auch eine Tafel ohne überzähliges System gewinnen. Die Gleichung (1) läßt sich schreiben

$$(\sqrt{c + 1100e^2})^2 = (24d + 11p)^2 + (\sqrt{c - 400d^2})^2 \quad \ldots\ldots \quad (6),$$

wobei wir den willkürlichen Parameter c so bestimmen, daß $c - 400d^2$ reell wird. Da hier die obere Grenze von d der Wert 100 ist, so wählen wir

$$c = 4\,000\,000 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7).$$

Die Gleichung (6) hat die Form

$$\varphi_3{}^2 = (\varphi_1 - \varphi_2)^2 + (\psi_1 - \psi_2)^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8),$$

welche ausdrückt, daß der Abstand der Punkte

$$x = \mu \varphi_1,\ y = \mu \psi_1 \text{ und } x = \mu \varphi_2,\ y = \mu \psi_2$$

in einem rechtwinkligen Koordinatensystem gleich der Strecke

$$t = \mu \varphi_3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

auf einer beliebigen Geraden ist. Hierbei ist μ ein beliebiger Maßstabfaktor. Hier ist

$$\left.\begin{array}{l} L_1 \begin{cases} x = \mu \varphi_1 = \mu\, 24\, d \\ y = \mu \psi_1 = \mu \sqrt{4\,000\,000 - 400 d^2} \end{cases} \quad L_2 \begin{cases} x = \mu \varphi_2 = \mu(-11\, p) \\ y = \mu \psi_2 = 0 \end{cases} \\ L_3 \ldots\ldots t = \mu \varphi_3 = \mu \sqrt{4\,000\,000 + 1100\, e^2} \end{array}\right\} \quad . \quad (10).$$

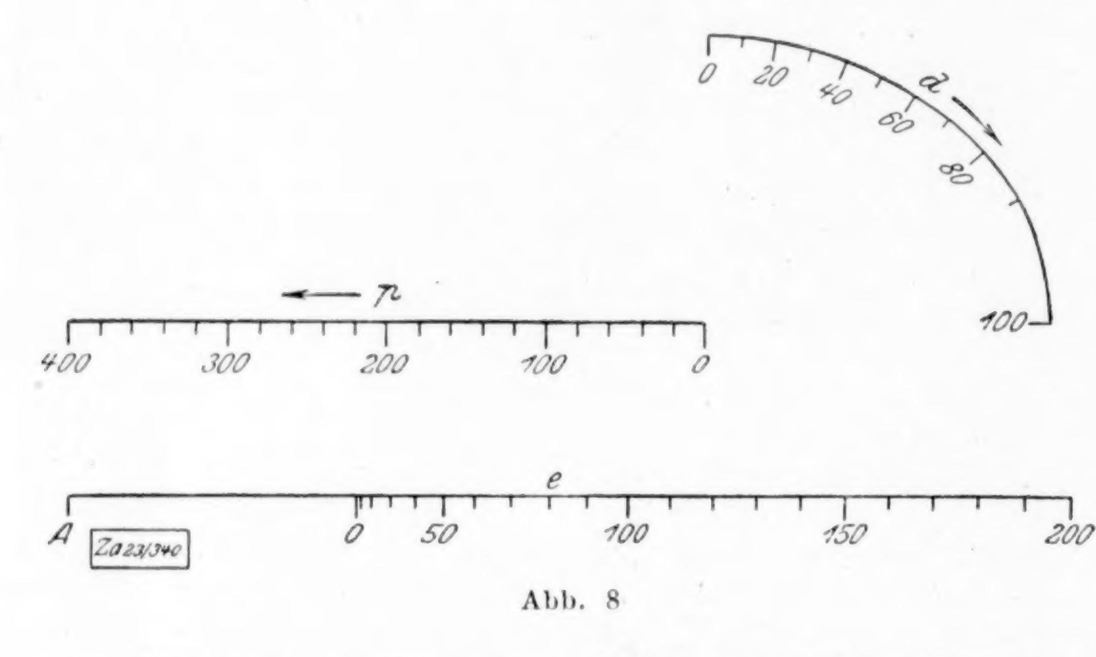


Abb. 8

In Abb. 8 sind diese Leitern mit dem Maßstab $\mu = 0{,}025$ mm gezeichnet.

Anwendungsbeispiel: $p = 150$ mm, $d = 60$ mm, $e = ?$. Wir greifen die Strecke zwischen $p = 150$ und $d = 60$ der betreffenden Leitern ab und setzen dann die eine Zirkelspitze in den festen Punkt A ein. Die andere zeigt dann auf der e-Leiter den gesuchten Wert $e \approx 85$ an. Auch hier kann ein Papierstreifen mit darauf gezeichneter e-Leiter verwandt werden.

Eliminiert man aus den Gleichungen der Leiter L_1 den Parameter d, so erhält man für $\mu = 0{,}025$

$$\frac{x^2}{60^2} + \frac{y^2}{50^2} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11).$$

Die d-Leiter ist also ein Ellipsenquadrant. Er ist leicht zu zeichnen, da die Ordinaten der Ellipse $^5/_6$ der Ordinaten des sie von außen berührenden Kreises betragen. Die Teilpunkte der d-Leiter sind leicht einzuzeichnen, da ihre Abszissen gleichförmig mit d zunehmen.

Allgemein sei gegeben die nur in ganz speziellen Fällen (vergl. S. 74) verstreckbare Gleichung

$$\varepsilon f_3^2 = a_{11} f_1^2 + 2\, a_{12} f_1 f_2 + a_{22} f_2^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12),$$

wo $\varepsilon = \pm 1$ sei und a_{22} positiv angenommen werden kann. Auf diese Form läßt sich (1) durch Quadrieren bringen. Die Gleichung (12) kann man schreiben

$$\left(\sqrt{\varepsilon f_3^2 + c}\right)^2 = \left[\sqrt{a_{22}}\, f_2 - \left(-\frac{a_{12}}{\sqrt{a_{22}}} f_1\right)\right]^2 + \left(\sqrt{c + \frac{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}{a_{22}} f_1^2}\right)^2 \quad . \quad . \quad (13),$$

wo c ein willkürlicher Parameter ist. Damit ist sie auf die Form

$$\varphi_3^2 = (\varphi_2 - \varphi_1)^2 + (\psi_2 - \psi_1)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

gebracht, mit

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1 = -\dfrac{a_{12}}{\sqrt{a_{22}}} f_1, \quad \psi_1 = \sqrt{c + \dfrac{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}{a_{22}} f_1^2}, \quad \varphi_2 = \sqrt{a_{22}}\, f_2, \quad \psi_2 = 0 \\ \varphi_3 = \sqrt{\varepsilon f_3^2 + c} \end{array}\right\} (15).$$

Wir unterscheiden drei Fälle[1]).

I. $a_{11} a_{22} - a_{12}^2 > 0$ und $\varepsilon = +1$.

In diesem Falle erhalten wir die einfachste reelle Darstellung dadurch, daß wir $c = 0$ setzen. Alle Leitern werden geradlinig. Wir erhalten sie am bequemsten folgendermaßen. Die Gleichung (12) können wir in diesem Falle schreiben

$$f_3^2 = (\sqrt{a_{22}}\, f_2)^2 + (\sqrt{a_{11}}\, f_1)^2 + 2 \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11} a_{22}}} (\sqrt{a_{22}}\, f_2)(\sqrt{a_{11}}\, f_1) \quad . \quad . \quad . \quad (16).$$

[1]) Der Fall $a_{11} a_{22} - a_{12}^2 = 0$ führt auf die verstreckbare Form $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 0$.

Diese Gleichung können wir identifizieren mit der Formel des Cosinussatzes

$$t^2 = x^2 + y^2 - 2 \cos \omega \, x \, y \quad \ldots \ldots \quad (17).$$

Man zeichnet deshalb auf den Schenkeln des Winkels

$$\omega = \text{arc} \cos \frac{-a_{12}}{\sqrt{a_{11} a_{22}}} \quad \ldots \ldots \quad (18)$$

die Leitern

$$x = \mu \sqrt{a_{11}} f_1 \text{ und } y = \mu \sqrt{a_{22}} f_2 \quad \ldots \ldots \quad (19)$$

und getrennt davon auf einer dritten Geraden die Leiter

$$t = \mu f_3 \quad \ldots \ldots \quad (20).$$

Beispiel: Angenäherter Umfang der Ellipse

$$L = \pi \left[{}^3/_2 (a + b) - \sqrt{a b} \right] \quad \ldots \ldots \quad (21).$$

Für diese Näherungsformel von Boussinesq, in der a und b die Halbachsen, L den Umfang der Ellipse bedeutet und die recht genau ist, wenn es sich nicht um sehr flache Ellipsen handelt, haben d'Ocagne und Soreau Netztafeln entworfen. Statt (21) schreiben wir

$$\left(\sqrt{\frac{2}{3 \pi} L} \right)^2 = (\sqrt{a})^2 - {}^2/_3 \sqrt{a} \sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 \quad \ldots \ldots \quad (22).$$

Wir zeichnen also auf den Schenkeln des Winkels $\omega = \text{arc} \cos {}^1/_3$, der natürlich nicht nach Grad und Minuten bestimmt, sondern nach dem Wert ${}^1/_3$ seines Cosinus konstruiert wird, die Leitern

$$x = \mu \sqrt{a} \text{ und } y = \mu \sqrt{b}$$

und außerdem die Leiter

$$t = \mu \sqrt{\frac{3 \pi}{2} L}.$$

So erhalten wir die in Abb. 9 dargestellte Tafel, die z. B. für $a = 11$, $b = 4$ den Wert $L = 50$ liefert. Auch hier kann wieder ein Papierstreifen mit aufgezeichneter L-Leiter statt des Zirkels verwandt werden.

Abb. 9

II. $a_{11} a_{22} - a_{12}^2 < 0$ und $\varepsilon = +1$.

Dies ist der Fall, den wir in dem Beispiel Abb. 8 behandelt haben. Wir bestimmen den Parameter c der Gleichung (13) als positive Zahl so groß, daß ψ_1 (s. die Gleichungen (15)) für den ganzen gegebenen Spielraum der Werte von f_1 reell wird. Die Leiter

$$L_1 \left\{ \begin{aligned} x &= \mu \varphi_1 = -\mu \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{22}}} f_1 \\ y &= \mu \psi_1 = \mu \sqrt{c + \frac{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}{a_{22}} f_1^2} \end{aligned} \right. \quad \ldots \ldots \quad (23)$$

hat jetzt eine Ellipse zum Träger, denn durch Elimination von f_1 aus den beiden letzten Gleichungen ergibt sich

$$\frac{x^2}{\mu^2 c \dfrac{a_{12}^2}{a_{12}^2 - a_{11} a_{22}}} + \frac{y^2}{\mu^2 c} = 1 \quad \ldots \ldots \quad (24).$$

Die Leiter

$$x = \mu \, q_2 = -\mu \sqrt{a_{22}} f_2 \quad \ldots \quad (25)$$

ist gleichförmig und bei der dritten Leiter

$$t = \mu \, q_3 = \mu \sqrt{f_3^2 + c} \quad \ldots \ldots \quad (26)$$

ist der Punkt $t = 0$ mitzuzeichnen. In ihn ist bei der Ablesung die eine Zirkelspitze einzusetzen (A in Abb. 8).

$$\text{III.} \quad a_{11} a_{22} - a_{12}^2 < 0, \quad \varepsilon = -1.$$

Die Entwicklung entspricht ganz der des zweiten Falles. Nur ist jetzt c so zu bestimmen, daß

$$q_3 = \sqrt{-f_3^2 + c}$$

für den nutzbaren Spielraum von f_3 reell wird. Der Kegelschnitt (24) ist jetzt eine Hyperbel.

Das Stechzirkelverfahren läßt sich auf weitere Fälle von Gleichungen anwenden, die in bezug auf Funktionen von drei und mehr Veränderlichen quadratisch sind. Für uns handelte es sich um den Nachweis, daß die Praxis Aufgaben stellt, bei denen das Fluchtungsverfahren versagt, und daß in solchen Fällen das Stechzirkelverfahren die Lücke unter Umständen ausfüllen kann. Dieses Verfahren verdient nicht das Mißtrauen, mit dem man allen nomographischen Ablesemethoden entgegenzutreten scheint, die etwas anderes als Fluchtlinienmethode sind. So fruchtbar wie diese ist es ja wohl nicht, da bei ihm nicht, wie bei der Massauschen Determinante, Funktionen von drei Variablen in additiver und multiplikativer Verknüpfung vorkommen. Es ist nicht verwunderlich, daß mancherlei Ansätze zu diesem Prinzip der Streckenkongruenz vorliegen. Es seien hier noch genannt die Anwendungen, die Werkmeister[1]) und Kraïtchik (Soreau II, S. 185—187) in speziellen Fällen vom Stechzirkel machen. Weiterhin kann natürlich die Zirkelbenutzung mit der Linealbenutzung verbunden werden, wie bei dem Nomogramm von Eiffel (Soreau II, S. 191), der Parallelen zieht und Strecken abträgt. Schließlich kann ja die Nomographie geradezu in ein graphisches Rechnen mit Bleistift, Zirkel, Winkel und Lineal auf einem Blatt ausarten, auf dem bezifferte Skalen und Kurvenscharen fertig vorgezeichnet oder vorgedruckt sind. Die von Schreiber[2]) auf logarithmischem Papier ausgeführten graphischen Rechnungen nach Mehmkes[3]) logarithmographischem Verfahren liefern ein Beispiel für diese Methoden, die sicher noch fruchtbringend weiterzubilden sind. Aber kann man bei einem derartigen graphischen Rechnen noch von Nomographie reden? 342

KURZE AUSZÜGE

Hydraulik.

Ein Problem der Meereskunde. Der Seefahrer pflegt täglich um die Mittagszeit durch astronomische Beobachtung den Ort, an dem er sich befindet, festzustellen. Vergleicht er diese »wahre« Lage mit der, die aus der vorangegangenen Beobachtung, dem gesteuerten Kurse und der Schiffsgeschwindigkeit errechnet wurde, so findet er eine Abweichung, die von der Meeresströmung herrührt und die »Besteckversetzung« genannt wird. Das königl. Niederländische meteorologische Institut hat in einem großen, 1919 in Utrecht erschienenen Tabellenwerk systematische Beobachtungen der Besteckversetzung im ganzen Atlantischen Ozean (wie früher für den Indischen Ozean) veröffentlicht. Auf Grund dieser »nach Eingradfeldern aufgerechneten« Angaben muß es möglich sein, den Verlauf der Oberflächen-Strömungen im Ozean zu ermitteln. Hans H. F. Meyer hat sich dieser Aufgabe in einer von der Berliner philosophischen Fakultät genehmigten, in den Veröffentl. des Instit. f. Meereskunde (herausg. von A. Merz, Neue Folge, Reihe A, Heft 11, Juni 1923) erschienenen Dissertation unterzogen. Wenn wir von der kritischen Untersuchung der Beobachtungsmethode und des Beobachtungsmaterials absehen, die den größten Teil der Arbeit ausmacht, liegt hier folgendes mathematische Problem vor, mit dem sich zu beschäftigen, den »angewandten Mathematikern« wohl empfohlen werden darf. Gegeben sind in einer Ebene, etwa in allen Punkten mit ganzzahligen Koordinaten, Vektoren nach Größe und Richtung; man soll die Kurvenschar aufsuchen, die das Vektorfeld »integriert«. Läßt man zunächst die Strömungsstärke beiseite, so hat man eigentlich nur das Problem der Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung, $y' = f(x, y)$, bei der die Funktion f durch ihre Werte in n^2 Gitterpunkten gegeben ist. Es liegt also zunächst eine Interpolationsaufgabe vor, deren Behandlung man aber passender Weise gleich mit dem Integrationsansatz verbinden wird. Die Aufgabe ist von genügender Allgemeinheit, um die Aufwendung einiger Mühe für ein grundsätzliches Lösungsverfahren zu rechtfertigen. Nimmt man dann noch die Angaben über

[1]) Ztschr. f. Math. u. Phys. 57, 1909, S. 279 bis 293.
[2]) P. Schreiber, Grundzüge einer Flächennomographie, 2 Bde., Braunschweig 1921 und 1922.
[3]) R. Mehmke, Leitfaden zum graphischen Rechnen, Leipzig und Berlin 1917.

die Geschwindigkeitsgröße hinzu, so wird man aus dem Vergleich mit der Kontinuitätsbedingung der ebenen Bewegung zu hydrodynamisch interessanten Aufschlüssen über den Verlauf der Meeresströmungen nach der Tiefe hin gelangen. — In der genannten Veröffentlichung hat sich der Verfasser damit begnügt, die in eine Karte eingezeichneten Vektorrichtungen nach dem Augenschein durch glatte Kurven zu verbinden.

Brückenstau. Wird der Querschnitt seine Flußlaufes durch Einbau von Brückenpfeilern verengt, so entsteht, wie alte Beobachtungen lehren, zwischen je zwei Pfeilern eine Senke, vor jedem Pfeiler ein Stau. Die älteren Hydrauliker, z. B. d'Aubuisson, haben für Senke und Stau Berechnungsformeln angegeben, die aus einer naheliegenden Anwendung der Energiegleichung hervorgehen. In einer mit schönen Strömungs-Lichtbildern geschmückten Abhandlung (Der Bauingenieur, 2, 1921, S. 342 bis 347) stellt sich Th. Rehbock, der Leiter des Karlsruher Flußbaulaboratoriums, auf den Standpunkt, daß der Brückenstau im wesentlichen eine Reibungswirkung ist und keinesfalls auf die angedeutete Weise berechnet werden kann. Um das eingebaute Hindernis herum bildet sich ein Totgebiet, das nur langsame Bewegung aufweist (»Walzenbildung«) und an dessen Grenze unter erheblicher Reibung der eigentliche Strom vorbeigeht. So erklärt es sich auch, daß größere oder geringere Oberflächenrauhigkeit der Einbauten fast ohne Einfluß bleibt. Für die Höhe des Brückenstaus in Einheiten der Geschwindigkeitshöhe im unverbauten Fluß gibt Rehbock folgende empirische Formel:

$$z = \alpha\,(0{,}72 + 1{,}2\alpha + 4\alpha^4)\,(1 + 2\omega),$$

worin α das »Verbauungs-Verhältnis«, d. h. das Verhältnis des verbauten Teils der Flußquerschnittes zum ganzen und ω das Verhältnis der Geschwindigkeitshöhe zur Tiefe des unverbauten Flusses bezeichnet. Die Formel gilt für Brückenpfeiler gewöhnlicher, symmetrischer Bauart, und nur solange als der Durchfluß »rein strömend«, d. h. ohne Wellenbildung erfolgt. Die Grenze hierfür soll durch

$$(\alpha + 0{,}13)\,(\omega + 0{,}046) < 0{,}018$$

gegeben sein. Die schon erwähnten, zahlreichen Aufnahmen des Abflußbildes und der Oberflächenströmung sind in mancherlei Hinsicht sehr lehrreich.

Mises. 351

BUCHBESPRECHUNGEN

GINO **DA FANO,** Aufgaben aus der darstellenden Geometrie für Studierende der Technischen Hochschulen. Zweite verbesserte und erweiterte Auflage. Verlag von Speidel & Wurzel. Leipzig und Zürich 1921. 66 S. 101 Figuren auf 9 Tafeln.

Das Büchlein enthält 403 Aufgaben, die sich in 10 Kapitel geteilt auf folgende Stoffe beziehen: Kurven und Flächen, Kollineation und Affinität, projektive Geometrie, Regelflächen, Nichtregelflächen zweiten Grades, kotierte Projektion und topographische Flächen, Durchdringungen, orthogonale Axonometrie, Kavalierperspektive, Zentralprojektion. Jedem Kapitel sind erläuternde Bemerkungen, Definitionen usw. vorausgeschickt, den Aufgaben zum Teil kurze Bemerkungen beigefügt, welche die Lösung andeuten. Die Aufgaben stehen alle auf einer höheren Stufe. Die elementaren Aufgaben der darstellenden Geometrie und die Aufgaben über Punkte, Gerade und Ebenen sowie über ebenflächige Gebilde sind ausgeschlossen. Die Zusammenstellung muß als gut und zweckmäßig bezeichnet werden; auch neue Aufgaben finden sich in beträchtlicher Zahl darunter. Das Streben nach möglichst kurzer Formulierung legt die Gefahr nahe, durch Weglassung des Subjektes und der bestimmten Artikel sich dem unerfreulichen Geschäftsstil zu nähern. Seite 33: »Zentralpunkt Z von c« — statt Der Zentralpunkt .... Seite 38, Aufgabe 179 muß es heißen die Achse statt die Achsen; die Aufgabe 154, S. 32 hat nur eine Lösung; wohl aber kann man fragen, wann sich unendlich viele Lösungen ergeben.

München, Mai 1923.

Karl Doehlemann. 299

Dr. phil. CH. **MÜLLER** und Dr phil. G. **PRANGE,** ordentliche Professoren an der Technischen Hochschule Hannover. Allgemeine Mechanik. Grundlegende Ansätze und elementare Methoden der Mechanik des Punktes und der Punktsysteme. Eine Einführung für Studierende der Natur- und Ingenieur-Wissenschaften. Helwingsche Verlagsbuchhandlung Hannover 1923. X + 551 S.

Die Systematik der »Allgemeinen Mechanik« von Müller und Prange ist diejenige von Kirchhoff. Die Begriffe Massenpunkt und Beschleunigung werden als primäre Begriffe an die Spitze gestellt und aus ihnen die Eigenschaften des Kaftbegriffes unter weiterer Zuhilfenahme der drei Newtonschen Axiome der Trägheit, der Bewegungsgröße und der Gleichheit von Kraft und Gegenkraft abgeleitet.

Es ist nur folgerichtig, daß dann die Statik, die Lehre vom Gleichgewicht, überall in dem Buche nur als ein Sonderfall der Dynamik oder Kinetik, der Lehre von der ungleichförmigen Bewegung, behandelt wird. Allerdings wird in dem Buche nicht gezeigt, wie die allgemeinen Methoden der Zusammensetzung, Zerlegung und des Gleichgewichts von beliebigen Kräftesystemen aus der Beschleunigungswurzel

des Kraftbegriffs entstehen. Dazu wäre noch die Hinzufügung eines weiteren Axioms, etwa des Arbeitsprinzips der virtuellen Verrückungen, nötig. Auch die von Hamel in seiner »Elementaren Mechanik« so stark betonte Spannungswurzel des Kraftbegriffs wird nicht herangezogen. Jedoch man könnte wohl sagen, daß sich diese Verbindungen unschwer herstellen ließen und nur für die Zwecke des Buches von den Autoren nicht für erforderlich gehalten wurden.

Immerhin wird der Ingenieur, der auf den Kraftbegriff in seinem, im wesentlichen im Gleichgewicht befindlichen Wirkungsgebiet als das Primäre eingestellt ist, nur dann hier keine Lücke empfinden, wenn er an das Buch mit einer guten Kenntnis der Mechanik herankommt und es zu einer Vertiefung seiner Kenntnisse und Anwendungsmöglichkeiten studiert.

Jene an sich wissenschaftlich berechtigte Stellung des Kraftbegriffes und der Statik an die zweite Stelle bringt es mit sich, daß die allgemeine Dynamik nicht, wie z. B. bei Routh, von dem d'Alembertschen Gleichgewichtsprinzip der Trägheitskräfte beherrscht wird, sondern daß aus den drei oben erwähnten Newtonschen Axiomen die Bewegungsgleichungen bei geometrischen Bedingungen abgeleitet und zu dem allgemeinen Gaußschen Prinzip des kleinsten Zwanges als dem umfassendsten Prinzip zusammengefaßt werden, wie dies am schärfsten schon Hertz in seiner Mechanik getan hatte. Erst in einem späteren Teil des Buches wird dann zur Statik, zum Prinzip der virtuellen Verrückungen und zum d'Alembertschen Prinzip übergegangen.

Dieser Gedankengang ist als einer der zulässigen durchaus unanfechtbar, ich möchte jedoch widersprechen, wenn die Verfasser dem Prinzip des kleinsten Zwanges aus Gründen der umfassenden Gültigkeit den Vorzug geben. Gibbs und Boltzmann haben zwar gezeigt, daß im Falle von Ungleichungen das Prinzip der virtuellen Verrückungen nicht so unmittelbar die Bewegung ergiebt wie das Prinzip der virtuellen Beschleunigungen, d. h. das Prinzip des kleinsten Zwanges, aber gegen das d'Alembertsche Gleichgewichtsprinzip wenden sich jene Beispiele nicht, sondern nur gegen seine Lagrangesche Formulierung durch das Prinzip der virtuellen Verrückungen.

Weiter aber noch behaupten die Autoren, daß das Gaußsche Prinzip im Gegensatz zum d'Alembertschen eine Lösung liefere auch dann, wenn die Nebenbedingungen bzw. Bewegungsbeschränkungen durch nicht lineare Gleichungen zwischen den Geschwindigkeiten der Systempunkte gegeben sind, aber sie geben kein Beispiel eines solchen mechanischen Systems und es gibt auch meines Wissens in der Literatur keines. Ich würde eher wie in Hertzs Mechanik folgern, daß Systeme, die dem d'Alembertschen Prinzip nicht unterworfen werden können, nicht verwirklichbar sind und übrigens kann man auch leicht Nebenbedingungen nämlich nicht lineare Beziehungen, zwischen den Beschleunigungen angeben, bei denen das Gaußsche Prinzip auch versagen würde.

Aber solche konstruierten Ausnahmefälle sind doch wohl Spitzfindigkeiten, welche in dem Buche fehlen könnten, ohne seinen Wert irgendwie zu beeinträchtigen.

Der eigentliche hohe Wert des Buches scheint mir vielmehr in seiner Einstellung auf die im besten Sinne neuzeitlichen Probleme der Physik zu bestehen. Seine Verfasser besitzen offenbar eine gründliche Kenntnis der Relativitätstheorie von Einstein und Minkowsky, der Atomphysik und Quantentheorie von Bohr, Rutherford, Sommerfeld, Planck, Epstein, Ehrenfest u. a. und der astronomisch-mathematischen Methoden der Störungsrechnung der Planetenbewegung.

In sehr geschickter Weise verstehen sie es, die geometrischen Grundbegriffe der Flächentheorie und deren Invariantenrechnung und den Uebergang der klassischen Mechanik zur Relativmechanik darzustellen. Unter anderm werden die Rolle der Zeitkoordinate, die Analogie zwischen Reaktions- und Gravitationskräften und der Zusammenhang zwischen den zehn ersten Integralen der Schwerpunktsbewegung und des Flächensatzes einerseits und der Kovarianz der Bewegungsgleichungen gegenüber der Gruppe der Bewegungen des Koordinatensystems andererseits besonders klar herausgearbeitet.

Auch die Art, wie die Integrationskonstanten der Bewegungsgleichungen quasiperiodischer Systeme in wesentliche und unwesentliche eingeteilt und wie mit ihrer Hilfe der Kern der mechanischen Quantentheorie an einer Reihe von Beispielen herausgeschält wird, erscheint mir ganz vortrefflich und sie bereitet durch die vielfache anschauliche Bezugnahme auf Beispiele des Elektronensystems der Atomphysik den Leser sehr schön für die wichtige Literatur über diesen Gegenstand vor. Dabei ist die Behandlung der Aufgaben mit Hilfe der Hamiltonschen kanonischen Gleichungen und der kanonischen Variabeln im Zusammenhang mit der sehr ausführlichen Behandlung der Störungsrechnung der Himmelsmechanik, die ja in der Atomphysik erneute Bedeutung gewonnen hat, in dieser übersichtlichen Art kaum anderswo zu finden. Immerhin können diese Methoden auch in der Darstellung dieses Buches ihrem Wesen nach nicht ganz einfach sein und entziehen sich einer Berichterstattung im Rahmen dieser Besprechung.

Uebrigens scheint mir, daß auch der Ingenieur aus den Approximationsmethoden der astronomischen Störungsrechnung, die bisher freilich etwas schwer zugänglich waren, vieles für die Lösung seiner Aufgaben lernen könnte. Auch dort werden vielleicht bei manchen bisher nicht erledigten Aufgaben oskulierende Grundlösungen und Reihenentwicklungen nach passenden Parametern des Problems zum Ziel führen.

Ist dieses Verfahren der Störungsrechnung also erst in weiterer Ferne geeignet, den for-

schenden Ingenieur anzuziehen, so sind von eigentlich technischen Aufgaben, die in dem Buche behandelt werden, einige kürzere Ausblicke und Rechnungen aus der Turbinentheorie (bei der geführten Bewegung) und der Theorie des Schleuderns von rotierenden Wellen und eine etwas ausführlichere Darstellung der Bewegung des Schubkurbelgetriebes und des Massenausgleichs zu nennen. In diesen technischen Anwendungen der Mechanik schließt sich naturgemäß die Darstellung an die der bekannten Lehrbücher von Föppl, Hamel, Lorenz u. a. an.

In betreff der Darstellungsweise der mathematischen Entwicklungen ist bemerkenswert, daß zwar die Grundbegriffe der Vektoralgebra in der Einleitung gegeben werden, daß aber im weiteren Verfolg von den Hilfsmitteln derselben fast gar kein Gebrauch gemacht wird, sondern die Rechnungserleichterungen z. B. in der Wahl geschickter Koordinaten und in der Benutzung der Invariantentheorie bei durchgehender Komponentenrechnung gesucht werden. Sachlich ist dies natürlich kein Unterschied und für manchen wird es vielleicht bequemer sein, sich nicht gleichzeitig in die Mechanik und in die Schreibweise der Vektoralgebra und ihrer Transformationen einzuarbeiten.

Ich hoffe, daß diese Besprechung des Müller-Prangeschen Werkes trotz einiger leiser Einwendungen den befruchtenden Eindruck wiedergibt, den ich beim Durchlesen empfangen habe. Es ist ein Buch, daß gerade zur richtigen Zeit erschienen ist, um den Anschluß der Mechanik an die brennenden Tagesfragen der Physik und die außerordentliche Erweiterung unserer Naturerkenntnis, dargestellt von zwei gründlichen Kennern beider Gebiete, aufrecht zu erhalten. Als solches wird es insbesondere dem Physiker und Mathematiker ganz besondere Dienste leisten, aber auch dem Ingenieur mit dem Ehrgeiz allgemeinerer Erkenntnis und der Anwendung neuer Methoden auf sein eigentliches Gebiet wird es willkommen sein.

Daß die Verfasser auch die Mühe nicht gescheut haben, die historische und genetische Seite des Lehrgebäudes der Mechanik im einzelnen hervortreten zu lassen, muß schließlich als ein nicht geringer Vorzug des Buches betont werden. Reißner. 361

Dr. ARNOLD **KOWALEWSKI,** a. o. Professor in Königsberg i. Pr. Die Buntordnung. Mathematische, philosophische und technische Betrachtungen über eine neue kombinatorische Idee. Heft 1. Entstehung und mathematischer Ausbau der Buntordnungslehre. Verlag von Wilhelm Engelmann, Leipzig 1922. 53 S.

Die Aufgabe, mit der sich dieses Büchlein befaßt, kann man wie folgt umschreiben. Wenn man aus n Elementen alle Kombinationen von je p unter ihnen bildet, so lassen sie sich jedenfalls in sehr verschiedener Weise anordnen. Der Verfasser nennt eine Anordnung, bei der zwei aufeinanderfolgende Kombinationen keines der Elemente gemeinsam haben oder in keinem Element gleich sind, eine »bunte Reihe 1. Grades«. Ebenso kann man bunte Reihen 2. und 3. usw. Grades bilden, indem man verlangt, daß in je 3, 4 usw. aufeinanderfolgenden Kombinationen sich kein Element wiederholen soll. Schließlich läßt sich die Frage aufwerfen, welches in diesem Sinne die »bunteste« Reihe der Kombinationen bei gegebenen n und p ist. Verschiedene einfache Fälle dieser allgemeinen kombinatorischen Aufgabe werden in der Schrift behandelt und mit einigen andern Problemen der Kombinatorik in Verbindung gebracht. Der logische Aufbau, die klare Fassung und die zweckmäßige Darstellung müssen anerkannt werden. Ueber das Ziel seiner Untersuchung äußert sich der Verfasser im Vorwort unter Hinweis auf die bevorstehenden Fortsetzungen in folgender Weise: »Das zweite Heft soll die philosophische Auswertung des neuen Wissenszweiges bringen. Das dritte Heft wird die bedeutsamsten praktischen Nutzungswege aufzeigen, die der Buntordnungsidee in der experimentalpsychologischen Technik, in der Fabrikorganisation, im Handelsbetrieb, in der Landwirtschaft, Medizin, Erziehungskunst, Spielindustrie, Kunstgärtnerei und Ornamentik offen stehen.« Man wird also abwarten müssen, wie der Autor diesem gewiß nicht bescheidenen Programm nachzukommen gedenkt. Mises. 394

NACHRICHTEN

Vorläufiges Programm des Kongresses für angewandte Mechanik in Delft. Die allgemeine Tagesordnung des Kongresses ist vorläufig wie folgt festgesetzt:

Dienstag, den 22. April, 8 Uhr abends: Eröffnung des Kongresses.

Mittwoch, den 23. April: Erste allgemeine Sitzung (Festigkeitslehre).

Donnerstag, den 24. April: Sektionssitzungen.

Freitag, den 25. April: Zweite allgemeine Sitzung (Hydro- und Aerodynamik).

Sonnabend, den 26. April: Sektionssitzungen. — 2 Uhr: Schlußsitzung.

Montag, den 28. April: Besuch der »Philips Gloeilampen Fabrieken« und des zugehörigen physikalischen Laboratoriums zu Eindhoven.

Bisher sind folgende Vorträge und Referate angemeldet worden:

Zusammenfassende Berichte für die allgemeinen Sitzungen.

C. B. Biezeno-Delft: Graphical and Numerical Stress Determination in Beams and Plates.

E. G. Coker-London: Optical Stress Determination. (Hierzu A. A. Griffith, kurze Mitteilung: The use of soap films in solving stress problems.)

L. Prandtl-Göttingen: Spannungsverteilung in plastischen Körpern.

A. A. Griffith-Farnborough (Hants): The Theory of Rupture (mit Experimenten).

G. I. Taylor-Cambridge: The Hydrodynamics of Rotating Fluids (mit Experimenten).

Th. von Kármán-Aachen: Die Stabilitätsfragen in der Hydrodynamik und die Theorie der Turbulenz.

J. M. Burgers-Delft: The Motion of a Fluid in the Boundary Layer along a Plane Surface.

T. Levi-Cività-Rom: Détermination rigoureuse des ondes permanentes d'ampleur finie.

E. Hogner-Stockholm: Ueber die Theorie der Schiffswellen und des Schiffswellenwiderstandes.

Napier Shaw-London: The Physical Structure of the Atmosphere regarded from the Dynamical Point of View.

Vorträge in Sektion I
(Rationelle Mechanik).

H. Alt-Dresden: Kinematische Synthese (Zusammenfassender Bericht).

H. P. Berlage jr.-den Haag: Ueber seismische Schwingungen.

Ph. Frank-Prag: Geometrische Deutung von Painlevés Theorie der reellen Bahnkurven.

F. A. Vening Meinesz-Amersfoort: Déterminations de l'intensité de la pesanteur dans les océans, moyennant des observations executées dans un sous-marin.

R. von Mises-Berlin: Motorrechnung, ein neues Hilfsmittel der Mechanik.

F. Pfeiffer-Stuttgart: Sperrungsvorgänge bei Reibung starrer Körper.

J. Tzénoff-Sofia: Une forme nouvelle des équations du Monvement des systèmes non holonomes et son application dans la théorie des percussions.

Vorträge in Sektion II
(Elastizität und Festigkeit).

Jos. Geiger-Augsburg: Meßgeräte und Verfahren zur Untersuchung mechanischer, technisch besonders wichtiger Schwingungsvorgänge (mit Demonstrationen).

R. Grammel-Stuttgart: Knickung von Schraubenfedern.

B. P. Haigh-Greenwich: Theory of Rupture in Fatigue.

H. Hencky-Delft: Zur Theorie plastischer Deformationen und der hierdurch im Material hervorgerufenen Nachspannungen.

W. Hort-Berlin-Charlottenburg: Schwingungen von Stäben und Platten.

G. Masing-Siemensstadt bei Berlin: a) Ueber Aenderung des Gesamtvolumens eines Körpers durch innere Spannungen.
b) Innere Spannungen und Aufreißen von Messing (season cracking).

A. Nádai-Göttingen: Beobachtungen der Gleitflächenbildung an plastischen Stoffen.

H. Reißner-Charlottenburg: Ueber das Erddruckproblem.

E. Schmid-Berlin-Dahlem: Neuere Untersuchungen an Metalleinzelkristallen.

E. Schwerin-Berlin-Halensee: Ueber ein Thema aus der Elastizitätstheorie.

R. V. Southwell-Teddington: Stress Systems in Solids of Revolution.

K. Terzaghi-Konstantinopel: Die Theorie der hydrodynamischen Spannungserscheinungen und ihr erdbautechnisches Anwendungsgebiet.

K. Weißenberg-Berlin-Dahlem: Zur Theorie der Deformationsstrukturen.

Th. Wyss-Danzig-Langfuhr: Experimentelle Spannungsuntersuchungen an einem hakenförmigen Körper (mit Lichtbildern).

Vorträge in Sektion III
(Hydro- und Aeromechanik).

A. G. von Baumhauer-Amsterdam: Zur Helicoptère.

V. Bjerknes-Bergen: Die hydrodynamischen Fernkräfte und deren Zusammenhang mit den Auftriebskräften, die die Aeroplane tragen (mit Experimenten).

S. Brodetsky-Leeds: Vortex Motion.

A. Friedmann-Petersburg: Ueber einige hydrodynamische Arbeiten russischer Gelehrter.

E. Hahn-Nancy: Considérations sur les turbines hydrauliques.

G. Kempf-Hamburg: Ueber den Reibungswiderstand von Flächen verschiedener Form.

C. Koning-Amsterdam: Niet stationaire stroomingen om een draagvlak.

L. Marchis-Paris: L'État actuel en France des études aérodynamiques.

Th. Rehbock-Karlsruhe: Die Wasserwalzen als Regler im Energie-Haushalt der Wasserläufe (mit Lichtbildern).

H. Solberg-Kristiania: Zum Turbulenzproblem.

C. Witoszynski-Warschau: Sur l'insuffisance du principe de la circulation dans l'aérodynamique dans son état actuel.

C. Witoszynski-Warschau: La construction des profils d'aviation.

N. Zeilon-Uppsala: Potential Problems in the Theory of Fluid Resistance. 396

(Redaktionsschluß 29. Februar 1924.)

Verantwortlich: für die Schriftleitung Professor Dr. von Mises, Berlin W 30, Neue Winterfeldtstraße 43; für den Anzeigenteil Fritz Noack, Berlin-Niederschönhausen.
VDI-Verlag G. m. b. H., Berlin. — Druck von A. W. Schade, Berlin N 39.